



Katedra matematiky
Fakulta stavební ČVUT v Praze

SBORNÍK

abstraktů

Studentské konference
a
Rektorysovy soutěže

1. prosince 2017
Praha

Vydavatel: Katedra matematiky, FSv ČVUT v Praze
Praha 2017

Editor: Stanislav Olivík

Podpořeno grantem SGS ČVUT, SVK 01/17/F1

Předmluva

Katedra matematiky FSv ČVUT opět pořádá Studentskou vědeckou konferenci, v jejímž rámci se koná Rektorysova soutěž. Připomeňme si, že v roce 2007 se konal 0. ročník, letos se koná již jubilejní 10. ročník. Soutěž byla v minulých letech organizována buď našimi kolegy z FJFI ČVUT, nebo naší katedrou.

Prezentované práce jsou z různých oblastí aplikované matematiky. Většina z nich souvisí s bakalářskými, diplomovými nebo disertačními pracemi účastníků konference.

Organizátoři konference by zde rádi poděkovali vedoucím studentských prací, recenzentům a členům hodnotící poroty za jejich práci, která přispěla k vysoké úrovni a prestiži konference.

Organizace konference je financována z grantu SVK 01/17/F1 uděleného naší katedře grantovou komisí Studentské grantové soutěže ČVUT. Tímto bychom chtěli poděkovat grantové komisi za udělení grantu.

Informace o Studentské vědecké konferenci a Rektorysově soutěži lze nalézt na webových stránkách <http://mat.fsv.cvut.cz/rektorys/soutez/>.

V Praze dne 1. 12. 2017

František Bubeník
Martin Soukenka

Karel Rektorys

Prof. RNDr. Karel Rektorys, DrSc. (1923-2004) působil na ČVUT od roku 1954 do roku 2004, tedy celých 50 let. Stal se významnou osobností mezi vědci. Proslavil se zejména metodou časové diskretizace při řešení parciálních diferenciálních rovnic. Profesor Rektorys měl obrovskou autoritu i jako pedagog. Jeho přednášky se staly fenoménem. Jako vystudovaný matematik dokázal překlenout hranice matematiky a inženýrských oborů. Podílel se například na projektu stavby Orlické přehrady. Byl autorem řady publikací, *Variační metody v inženýrských problémech* a v problémech matematické fyziky, *Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice*, *Co je a k čemu je vyšší matematika*, a byl vedoucím kolektivu autorů světoznámého *Přehledu užití matematiky*.



Obsah

Soutěžní příspěvky

Liya Gaynutdinova	9
<i>The Comparison of Numerical Methods for Solving Stochastic Elliptic Partial Differential Equations</i>	
Jan Mazáč	10
<i>Modely kvazikrystalu se soběpodobností</i>	
Kateřina Solovská	11
<i>Nerigidní registrace obrazu v magnetické rezonanci</i>	
Čeněk Škarda	12
<i>Optimalizace objektivních funkcí využitím stromových struktur</i>	
Marek Tyburec	13
<i>Mathematical Programming Approach to Tiling of Finite Areas With Wang Tiles</i>	

Nesoutěžní příspěvky

Oleksiy Maybrodskyy, Michal Karásek	17
<i>Transformace a určení přesnosti geodetických souřadnic v R-projektu</i>	
Jitka Pišová	19
<i>Kvalitativní vlastnosti Navierových-Stokesových rovnic na omezené konvexní oblasti</i>	
Petra Vacková	20
<i>Navierovy-Stokesovy rovnice na konvexní oblasti a zobecněná energetická nerovnost</i>	

Soutěžní příspěvky

The Comparison of Numerical Methods for Solving Stochastic Elliptic Partial Differential Equations

Liya Gaynutdinova*

*Katedra matematiky FSv ČVUT, liya.gaynutdinova@fsv.cvut.cz

Abstrakt. In this work we consider the following stochastic problem

$$\begin{cases} \nabla \cdot (a(x, \zeta) \nabla u(x, \zeta)) = f(x) & \text{in } \Omega \times D \\ u(x, \zeta) = 0 & \text{in } \Omega \times \partial D, \end{cases}$$

where $x \in D \subset \mathbb{R}^2$ and $\zeta \in \Omega$ is a random variable. We are calculating the solution's expected value and variance. For solving this problem we are using and comparing three numerical methods: Monte Carlo method, collocation method and reduced basis method.

Literatura:

- [1] Ch. M. Grinstead, J. L. Snell, Introduction to Probability, https://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/amsbook.mac.pdf
- [2] C. Johnson, Numerical solution of partial differential equations by the finite element method, Studentlitteratur, 1987.
- [3] K. W. Morton, D. Mayers, Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction, Second Edition, Cambridge University Press, 2005
- [4] F. Nobile, R. Tempone, C. Webster, The Analysis of a Sparse Grid Stochastic Collocation Method for Partial Differential Equations with High-Dimensional Random Input Data, 2007
- [5] P. Chen, A. Quarteroni, G. Rozza, Comparison Between Reduced Basis and Stochastic Collocation Methods for Elliptic Problems, 2013
- [6] W. Andreas Klimke, Sparse Grid Interpolation Toolbox, Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS) Fakultät Mathematik und Physik

Modely kvazikrystalu se soběpodobností

Jan Mazáč

Katedra fyziky FJFI ČVUT, mazacja2@fjfi.cvut.cz

Abstrakt. V práci se zabýváme matematickým popisem možných soběpodobností jistých druhů diskrétních množin, s jejichž pomocí je možno modelovat kvazikrystaly. Uznávaným matematickým modelem pro kvazikrystaly jsou tzv. cut-and-project množiny, které přirozeně vznikají z cut-and-project schémat. Cut-and-project schéma $(\mathcal{L}, \pi_1, \pi_2)$ je dáno mříží \mathcal{L} v \mathbb{R}^s a projekcemi π_1, π_2 na dva vhodně orientované podprostory V_1, V_2 . Cut-and-project množina $\Sigma(\Omega)$ je delonovská podmnožina $\pi_1(\mathcal{L})$. V práci odvodíme několik tvrzení popisujících souvislost mezi soběpodobnostními transformacemi mříže \mathcal{L} a transformacemi projekcí $\pi_1(\mathcal{L})$ a $\pi_2(\mathcal{L})$. Pod pojmem soběpodobnost rozumíme obecně takové afinní zobrazení A množiny M , které splňuje $A(M) \subset M$. Popíšeme způsob, jak pomocí požadavků na transformaci mříže \mathcal{L} konstruovat cut-and-project schéma s příslušnou soběpodobností. Představíme nový pohled na modelování kvazikrystalů, který si vystačí pouze s metodami lineární algebry. V případě požadavku 5četné symetrie pak sestrojíme nedegenerované ireducibilní cut-and-project schéma invariantní na izometrii řádu 5. Na množině $\pi_1(\mathcal{L})$ zkoumáme další možné soběpodobnosti této množiny a ukážeme, že tvoří asociativní algebru nad \mathbb{Z} . Rovněž nalezneme příklad netriviální soběpodobnosti kvazikrystalu, která není škálovanou rotací.

Výsledky práce jsou shrnuty v článku On self-similarities of cut-and-project sets, zaslaném do Acta Polytechnica.

Nerigidní registrace obrazu v magnetické rezonanci

Kateřina Solovská

Katedra matematiky FJFI ČVUT, solovkat@fjfi.cvut.cz

Abstrakt. Tato práce se zabývá nerigidní registrací snímků srdce z magnetické rezonance. Cílem této práce je navrhnout metodu pro registraci snímků MOLLI sekvence, které mohou být posléze použity pro výpočet přesných hodnot T_1 relaxačních časů, charakterizujících tkáň v daném bodě srdce. MOLLI sekvence se skládá z jedenácti snímků pořízených v průběhu sedmnácti srdečních cyklů, kde první tři snímky mají výrazně nižší intenzitu než zbytek sekvence. Pro registraci snímků se stejnou intenzitou je použita metoda výpočtu optického toku, založená na předpokladu zachování intenzity a gradientu intenzity. Pro registraci snímků s proměnlivou intenzitou je použita metoda výpočtu optického toku mezi distančními funkcemi segmentovaných oblastí na snímcích. Pro segmentaci těchto oblastí je použita metoda minimalizace Mumfordova-Shahova funkcionálu a vrstevnicová metoda. Jsou představeny výsledky aplikace těchto metod na reálné snímky srdce. Ukazuje se, že s použitím těchto metod jsme schopni zmenšit rozdíly mezi snímky a získat rozdílné hodnoty T_1 časů.

Literatura:

- [1] B. K. Horn and B. G. Schunck, “Determining optical flow,” *Artificial intelligence*, vol. 17, no. 1-3, pp. 185–203, 1981.
- [2] S. Baker, D. Scharstein, J. Lewis, S. Roth, M. J. Black, and R. Szeliski, “A database and evaluation methodology for optical flow,” *International Journal of Computer Vision*, vol. 92, no. 1, pp. 1–31, 2011.
- [3] I. M. Gelfand, R. A. Silverman, *et al.*, *Calculus of variations*. Courier Corporation, 2000.
- [4] M. Sussman, P. Smereka, and S. Osher, “A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow,” *Journal of Computational physics*, vol. 114, no. 1, pp. 146–159, 1994.

Optimalizace objektivních funkcí využitím stromových struktur

Čeněk Škarda*

*Katedra matematiky FJFI ČVUT, skardcen@fjfi.cvut.cz

Abstrakt. Práce se zabývá použitím metody gradientního boostingu stromů v úloze klasifikace více tříd. Práce vychází z Friedmanova pohledu na boosting, jako na minimalizaci globální ztrátové funkce. Na jeho základě odvozujeme aproximaci druhého řádu metody boostingu stromů pro logaritmickou ztrátovou funkci. Dále se zabýváme regularizovanou ztrátovou funkcí, tzv. objektivní funkcí, s cílem lepší kontroly komplexity a výsledné přesnosti modelu. Metoda boostingu stromů je porovnána s náhodnými lesy na několika veřejně dostupných datasetech a dále na úloze klasifikace malwaru mezi běžným provozem na síti. Na žádném datasetu jsme v rozporu s očekáváním nepozorovali přetrénování boosted lesů. Dále jsme dosáhli s boosted lesy srovnatelné nebo lepší přesnosti než s náhodnými lesy.

Literatura:

- [1] Breiman, L. (2001). Random forests. *Machine learning*, 45(1):5–32.
- [2] Criminisi, A., Shotton, J., and Konukoglu, E. (2012). *Decision forests: A unified framework for classification, regression, density estimation, manifold learning and semi-supervised learning*, volume 7. NOW Publishers Inc.
- [3] Freund, Y. and Schapire, R. E. (1995). A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting. In *European conference on computational learning theory*, pages 23–37. Springer.
- [4] Friedman, J., Hastie, T., Tibshirani, R., et al. (2000). Additive logistic regression: a statistical view of boosting (with discussion and a rejoinder by the authors). *The annals of statistics*, 28(2):337–407.
- [5] Schuler, S., Wohlhart, P., Leistner, C., Saffari, A., Roth, P. M., and Bischof, H. (2013). Alternating decision forests. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 508–515.

Mathematical Programming Approach to Tiling of Finite Areas With Wang Tiles

Marek Tyburec*, Jan Zeman†

*Katedra mechaniky FSv ČVUT, marek.tyburec@fsv.cvut.cz

†Katedra mechaniky FSv ČVUT, Jan.Zeman@cvut.cz

Abstract. Wang tiles constitute a convenient formalism for the description of aperiodic tilings, used, e.g., for compression of complex signals in computer graphics and materials engineering. Because the problem of generating finite-sized Wang tilings is known to be NP complete, existing approaches are specific to distinct tile sets.

In this contribution, we reformulate the finite tiling generation problem as an equivalent binary feasibility program, and develop its linear and semidefinite programming relaxations suitable for the branch and bound method. The resulting formulation applies to any Wang tile set and allows for a natural incorporation of additional constraints, such tile- and color-based, or periodic boundary conditions. Evaluating the performance of our formulations, we conclude that the linear relaxation is better suited for solution of the problem. As a byproduct, we also reveal two surprising discoveries made during studies of well-established tile sets: the Knuth tile set of 92 tiles contains an unusable tile and the Lagae tile set of 44 corner tiles is not aperiodic.

Acknowledgement. This work was supported partly by the Grant Agency of the CTU in Prague, SGS17/042/OHK1/1T/11, by the Grant Agency of the Czech Republic, GAČR 15-07299S, by the Ministry of Industry and Trade, MPO FV10202, and by the Technology Agency of the Czech Republic, TAČR TH02020420.

References:

- [1] Berger, R. (1966). *The undecidability of the domino problem*. Memoirs of the American Mathematical Society, 0(66).
- [2] Knuth, D. E. *The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms*, Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1968.
- [3] Lagae, A., Kari, J., and Dutré P. (2006). *Aperiodic Sets of Square Tiles with Colored Corners*. Report CW, 460.
- [4] Wang, H. (1961). *Proving Theorems by Pattern Recognition - II*. Bell System Technical Journal, 40(1), 1–41.

Nesoutěžní příspěvky

Transformace a určení přesnosti geodetických souřadnic v R-projektu

Bc. Oleksiy Maybrodskyy *, Bc. Michal Karásek ‡

* Katedra geomatiky FSv ČVUT, oleksiy.maybrodskyy@fsv.cvut.cz

‡ Katedra geomatiky FSv ČVUT, michal.karasek@fsv.cvut.cz

Abstrakt. Práce se věnuje návrhu a analýze algoritmu pro vytvoření funkcí v R-projektu na výpočet Helmertovy transformace v rovině a na výpočet přesností bodů základních geodetických úloh. Dále je řešena implementace daných algoritmů a jejich následná aplikace na experimentální data pro ověření přesnosti výpočtu. Výstupem práce je volně dostupný rpackage, který je šířen pod licencí GNU general public license.

Transformace geodetických souřadnic patří mezi základní úlohy výpočetní geodézie. Používá se jak pro určení polohy pozemních objektů, tak pro objekty pohybující se ve vesmíru. Tomuto problému se věnovala řada autorů, někteří přistupovali k problému deterministicky, jiní do svého přístupu zahrnuli předpokládané nepřesnosti měření. V praxi často užívaný místní souřadnicový systém pro stavby rozsáhlejšího charakteru bývá následně transformován do závazného souřadnicového systému daného státu. Pro převod souřadnic bodů z jednoho souřadnicového systému do druhého se běžně užívá Helmertovy transformace.

Souřadnice bodů v geodézii se získávají na základě měřických a výpočetních metod. Pomocí základních geodetických úloh lze vypočítat souřadnice bodů, jejichž přesnost je charakterizována kovarianční maticí souřadnic. Z kovarianční matice spočítáme střední chybu souřadnicovou a střední elipsu chyb, část prostoru, ve kterém má koncový bod předepsanou pravděpodobnost výskytu

Cílem práce je návrh a analýza algoritmu pro vytvoření knihovny v R-projektu na výpočet výše zmíněné Helmertovy transformace v rovině a na výpočet přesností bodů základních geodetických úloh. Implementace daných algoritmů a jejich následná aplikace na experimentální data pro ověření přesnosti výpočtu.

Poděkování. Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT. Číslo grantu SGS17/002/OHK1/1T/11. Zároveň bychom rádi poděkovali vedoucí práce Dr. RNDr. Janě Noskové.

Literatura:

- [1] Maybrodskyy, Oleksiy: *Souřadnicové systémy a jejich transformace*, bakalářská práce pod vedením Mgr. Ing. Jakuba Šolce Ph.D.
- [2] Skořepa, Zdeněk: *Geodézie 4*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014.
- [3] Kočandrlová, Milada: *Geo-matematika II*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2008.
- [4] Rektorys Karel a spolupracovníci: *Přehled užití matematiky I*. Vydavatelství Prometheus, Praha 2000.
- [5] Ratiborský, J.: *Geodézie 10*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2005.
- [6] Writing R extensions [Online], <https://cran.r-project.org/doc/manuals/r-release/R-exts.html>

Kvalitativní vlastnosti Navierových-Stokesových rovnic na omezené konvexní oblasti

Jitka Píšová *

* Katedra matematiky FSv ČVUT, jitka.pisova@fsv.cvut.cz

Abstrakt. V příspěvku se zabýváme kvalitativními vlastnostmi slabého a silného řešení Navierových-Stokesových rovnic na omezené konvexní oblasti a na časovém intervalu $(0, T)$. Na hranici předepisujeme okrajové podmínky Navierova typu.

Nejprve uvedeme klasickou formulaci úlohy - systém Navierových-Stokesových rovnic, které modelují proudění vazké nestlačitelné tekutiny, doplníme o zvolené počáteční a okrajové podmínky. Dále vysvětlíme význam jednotlivých rovnic a definujeme slabou formulaci úlohy, slabé a silné řešení.

Na závěr příspěvku zformulujeme problém, za jakých podmínek je slabé řešení na nějakém dostatečně malém časovém intervalu $(0, \delta) \subset (0, T)$ silným řešením. Výsledkem je uvedena určitá postačující podmínka taková, aby slabé řešení bylo na intervalu $(0, \delta)$ opravdu silným.

Poděkování. Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT v Praze č. SGS17/116/OHK1/2T/11 „Robustnost řešení Navierových-Stokesových rovnic s různými typy okrajových podmínek“

Literatura:

- [1] Temam R.: *Navier-Stokes Equations, theory and numerical analysis*. North-Holland Publishing edition, Company, Amsterdam - New York - Oxford. Revis, 1979.
- [2] Kučera P.: *Basic properties of solution of the non-steady Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions in a bounded domain*. Ann. Univ. Ferrara **55**, 2009, 289-308.
- [3] Kučera P., Neustupa J.: *On L^3 - stability of strong solutions to the Navier-Stokes equations with the Navier-type boundary conditions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **405**, 2013, 731-737.

Navierovy-Stokesovy rovnice na konvexní oblasti a zobecněná energetická nerovnost

Petra Vacková *

* Katedra matematiky FSv ČVUT, petra.vackova@fsv.cvut.cz

Abstrakt. V příspěvku se zabýváme kvalitativními vlastnostmi řešení Navierových-Stokesových rovnic na omezené konvexní oblasti, kde na hranici předepisujeme okrajovou podmínku Navierova typu.

Je známo, že pro řešení Navierových-Stokesových rovnic s homogenními Dirichletovskými okrajovými podmínkami existuje řešení, které splňuje tzv. zobecněnou energetickou nerovnost pro nezápornou testovací spojitou funkci φ . Naším cílem je konstrukce řešení úlohy s okrajovou podmínkou Navierova typu, které rovněž splňuje zobecněnou energetickou nerovnost pro určitou třídu testovacích funkcí.

Poděkování. Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT v Praze č. SGS17/116/OHK1/2T/11 „Robustnost řešení Navierových-Stokesových rovnic s různými typy okrajových podmínek“.

Editor	Stanislav Olivík
Název díla	Sborník abstraktů Studentské konference a Rektorysovy soutěže
Vydalo	České vysoké učení technické v Praze
Zpracovala	Fakulta stavební
Kontaktní adresa	Katedra matematiky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, Praha 6
Tel.	+420 22435 4390
Počet stran	20
Vydání	1.

Neprodejné.

Praha 2017