



Katedra matematiky  
Fakulta stavební ČVUT v Praze

# **SBORNÍK**

## **abstraktů**

Studentské konference  
a  
**Rektorysovy soutěže**

20. listopadu 2020  
Praha

Vydavatel: Katedra matematiky, FSv ČVUT v Praze  
Praha 2020

Editor: Stanislav Olivík

Podpořeno grantem SGS ČVUT, SVK 01/20/F1

# Předmluva

Katedra matematiky Fakulty stavební ČVUT opět pořádá Studentskou vědeckou konferenci, v jejímž rámci se koná Rektorysova soutěž. Připomeňme si, že v roce 2007 se konal 0. ročník, letos se koná již 13. ročník. Soutěž byla v minulých letech organizována buď našimi kolegy z FJFI ČVUT, nebo naší katedrou.

Letošní ročník je výjimečný tím, že Studentská vědecká konference se koná jako videokonference online. Nepříznivá hygienická situace v letošním roce nedovolila prezenční konání této tradiční konference.

Prezentované práce jsou z různých oblastí aplikované matematiky. Mnoho z nich souvisí s bakalářskými, diplomovými nebo disertačními pracemi účastníků konference.

Organizátoři konference by zde rádi poděkovali především účastníkům konference a Rektorysovy soutěže, dále vedoucím studentských prací, recenzentům a členům odborné hodnotící poroty za jejich práci, která přispěla k vysoké úrovni a prestiži konference.

Organizace konference je financována z grantu SVK 01/20/F1 uděleného naší katedře grantovou komisí Studentské grantové soutěže ČVUT. Tímto bychom chtěli poděkovat grantové komisi za udělení grantu.

Informace o Studentské vědecké konferenci a Rektorysově soutěži lze nalézt na webových stránkách <https://mat.fsv.cvut.cz/rektorys/soutez/>.

V Praze dne 20. 11. 2020

František Bubeník  
Martin Soukenka



## Karel Rektorys

Prof. RNDr. Karel Rektorys, DrSc. (1923-2004) působil na ČVUT od roku 1954 do roku 2004, tedy celých 50 let. Stal se významnou osobností mezi vědci. Proslavil se zejména metodou časové diskretizace při řešení parciálních diferenciálních rovnic. Profesor Rektorys měl obrovskou autoritu i jako pedagog. Jeho přednášky se staly fenoménem. Jako vystudovaný matematik dokázal překlenout hranice matematiky a inženýrských oborů. Podílel se například na projektu stavby Orlické přehrady. Byl autorem řady publikací, *Variační metody v inženýrských problémech* a v problémech matematické fyziky, *Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice*, *Co je a k čemu je vyšší matematika*, a byl vedoucím kolektivu autorů světoznámého *Přehledu užití matematiky*.





# Obsah

## Soutěžní příspěvky

|   |    |
|---|----|
| Liya Gaynutdinova   | 9  |
| <i>Inverse Analysis of a Stochastic PDE Using Bayes Method</i>  |    |
| Lukáš Heriban   | 10 |
| <i>Aproximace jednorozměrných relativistických bodových interakcí pomocí nelokálních potenciálů</i>   |    |
| Pavel Horák   | 11 |
| <i>Modelování smrštění symetricky a nesymetricky vysychajícího betonu</i>   |    |
| Martin Jex  | 13 |
| <i>Testování fázové stability vícesložkových směsí s využitím metod globální optimalizace</i>   |    |
| Martin Kovanda  | 14 |
| <i>Rozpoznávání ultrazvukových signálů pomocí konvolučních neuronových sítí</i>   |    |
| Jan Kovář   | 17 |
| <i>Matematické modelování proudění tekutin a transportu kontrastní látky v cévách</i>   |    |
| Martin Ladecký  | 18 |
| <i>Guaranteed Two-sided Bounds on all Eigenvalues of Preconditioned Diffusion and Elasticity Problems Solved by the Finite Element Method</i> |    |
| Michal Malík  | 19 |
| <i>Matematické modelování fázového rozhraní metodou lattice Boltzmann</i>   |    |
| Karolina Nedomová   | 22 |
| <i>Numerická analýza vývoje teploty v betonovém kontejneru úložiště vyhořelého jaderného paliva se zohledněním vlivu hydratačního tepla</i>   |    |
| Vít Pánek   | 24 |
| <i>Supernáhodné stavy termodynamického dopravního plynu a jejich matematické vlastnosti</i>   |    |
| Marek Tyburec   | 26 |
| <i>Global optimality in minimum compliance topology optimization of frames and shells by moment-sum-of-squares hierarchy</i>                  |    |
| Pavla Veselá  | 27 |
| <i>Efektivita aritmetických algoritmů v nestandardních číselných soustavách</i>   |    |
| Daniel Wohlrath   | 29 |
| <i>Asymptotické vlastnosti statistické rigidity v částicových systémech s balanční vlastností</i>   |    |

|  |    |
|--|----|
| Dominika Zogatová  | 31 |
| <i>Úvod do teorie kooperativních her: teoretická a experimentální studie</i> |    |

Posudky na soutěžní příspěvky

|                   |    |
|-------------------|----|
| Liya Gaynutdinova | 35 |
| Lukáš Heriban     | 36 |
| Pavel Horák       | 38 |
| Martin Jex        | 39 |
| Martin Kovanda    | 40 |
| Jan Kovář         | 41 |
| Martin Ladecký    | 43 |
| Michal Malík      | 44 |
| Karolina Nedomová | 45 |
| Vít Pánek         | 46 |
| Marek Tyburec     | 47 |
| Pavla Veselá      | 48 |
| Daniel Wohlrath   | 50 |
| Dominika Zogatová | 51 |



## **Soutěžní příspěvky**



# Inverse Analysis of a Stochastic PDE Using Bayes Method

Gaynutdinova Liya<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Faculty of Civil Engineering, CTU in Prague,  
liya.gaynutdinova@fsv.cvut.cz

**Abstract** In this project, an inverse problem for parameter identification of an elliptic partial differential equation in the form of the steady-state heat equation is considered. The parameters are involved in the data of the problem, more precisely in the random fields that represent the thermal conductivity  $\lambda$  of the material and the Dirichlet boundary conditions. The parameters are to be identified based on temperature distributions resulting from the finite element method solution of the problem. The Bayesian approach is used by applying the Metropolis-Hastings algorithm to approximate the parameter's distribution.

## Reference

- [1] R. Blaheta, M. Béréš, S. Domesová, P. Pan, A Comparison of Deterministic and Bayesian Inverse with Application in Micromechanics. *Applications of Mathematics*, 63 (6), 2018, pp. 665–686.
- [2] T. Bui-Thanh, A Gentle Tutorial on Statistical Inversion using the Bayesian Paradigm, Institute for Computational Engineering and Sciences, The University of Texas at Austin. Published online.
- [3] K. W. Morton, D. Mayers, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction*, Second Edition, Cambridge University Press, 2005.
- [4] D. Xiu, *Numerical Methods for Stochastic Computations: A Spectral Method Approach*, Princeton University Press, 2010.
- [5] G. O. Roberts, A. Gelman AND W. R. Gilks, Weak Convergence and Optimal Scaling Of Random Walk Metropolis Algorithms, 1997. *The Annals of Applied Probability*, Vol. 7, No. 1, pp. 110–120.

# Aproximace jednorozměrných relativistických bodových interakcí pomocí nelokálních potenciálů

Lukáš Heriban

FJFI ČVUT, Heribluk@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** Tato práce řeší problematiku aproximací jednorozměrných relativistických bodových interakcí pro Diracův operátor [3] za použití nelokálních potenciálů. Za tento nelokální potenciál volíme projekci na pevně zvolenou škálovanou funkci  $v$  z  $L^2(\mathbb{R})$  tenzorově vynásobenou s  $2 \times 2$  komplexní maticí. Pro tento nelokální potenciál dokážeme uniformní konvergenci v resolventě k jistému operátoru, který popisuje relativistickou bodovou interakci. Následně je zde řešena otázka renormalizace vazebných konstant, tj. otázka zda se shoduje formální limita použité aproximace s formálním zápisem operátorové limity.

**Poděkování.** Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli Ing. Matěji Tuškovi, Ph.D. za pečlivost a ochotu při vedení mé bakalářské práce.

## Literatura:

- [1] P. Šeba, *Klein's Paradox and the Relativistic Point Interaction*. Letters in Mathematical Physics 18, 1989, 77-86.
- [2] M. Tušek, *Approximation of one-dimensional relativistic point interactions by regular potentials revised*. arXiv:1904.01061 (preprint ), 2019.
- [3] S. Benvegnu, L. Dabrowski, *Relativistic point interaction in one dimension*. Letters in Mathematical Physics 30, 1994, 159-167.
- [4] R.J. Hughes, *Relativistic point interactions: approximation by smooth potentials*. Reports on Mathematical Physics 39, 1997.
- [5] R.J. Hughes, *Finite-rank perturbations of the Dirac operator*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 238, 1999.

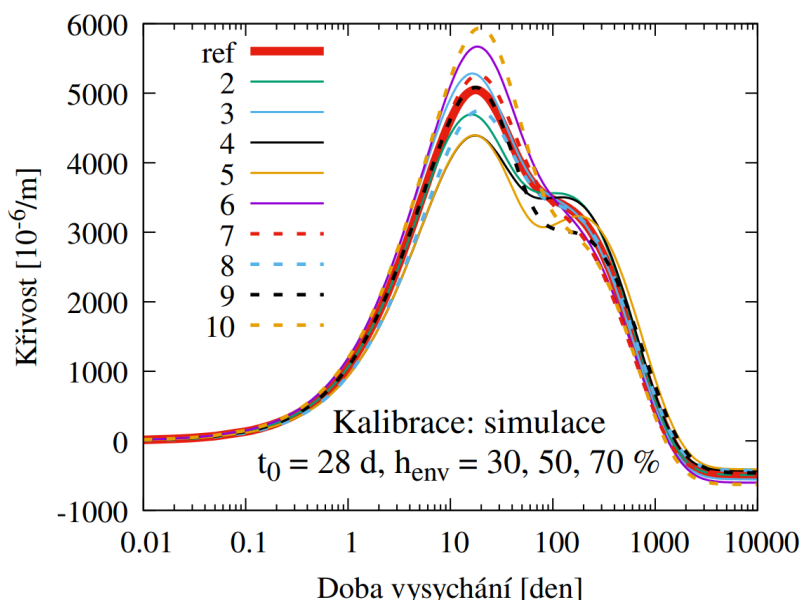
# Modelování smrštění symetricky a nesymetricky vysychajícího betonu

Pavel Horák \*, Petr Havlásek ‡

\* Katedra mechaniky FSV ČVUT, pavel.horak@fsv.cvut.cz

‡ Katedra mechaniky FSV ČVUT, petr.havlassek@fsv.cvut.cz

**Abstrakt.** Časově závislé chování symetricky vysychajícího betonového prvku s konstantním průřezem může být predikováno na základě několika různých numerických modelů. To platí zejména, dokud se díváme na průřez jako na celek a pozorujeme pouze průměrné hodnoty deformací. Ve chvíli, kdy je popisováno nerovnoměrné vysychání, je nutné použít metodu konečných prvků pro přesnější analýzu. Protože k problematice nerovnoměrného vysychání není k dispozici příliš mnoho experimentálních dat, jsou obvykle vstupní parametry pro model kalibrovány na malých laboratorních vzorcích. V této práci je rozebráno, zda tento přístup vede k jedné nejlepší sadě parametrů pro model transportu vlhkosti Bažant-Najjar. V případě chybějících experimentálních dat jsou tato data nahrazena numerickým modelem s využitím sady parametrů dávající nejlepší shodu s experimentem. Následné porovnávání se zaměřovalo na chování asymetricky vysychajícího vzorku a výsledky jsou podrobněji rozebrány.



Obr. 1: Vývoj křivosti při začátku vysychání ve 28 dnech a relativní vlhkosti okolního prostředí  $RH = 50$  %. Zobrazené sady parametrů dávají nejlepší shodu pro osově smrštění betonu starého 28 dní při začátku vysychání při současně třech úrovních relativní vlhkosti okolního prostředí  $RH = 30, 50, 70$  %.

V rámci porovnání výsledků podle vývoje křivosti jednostranně vysychajícího vzorku bylo zjištěno, že některé sady parametrů vykazují neintuitivní chování. Křivost nejprve s časem narůstá, dosahuje lokálního maxima a následně klesá, aby po dosažení lokálního minima opět vzrostla a dosáhla globálního maxima.

**Poděkování.** Práce byla podpořena Grantovou agenturou České republiky jako projekt 19-20666S a dále grantem SGS20/38/OHK1/1T/11.

### Literatura:

- [1] V. Šmilauer, P. Havlásek, T. Gasch, et al. Hygro-mechanical modeling of restrained ring test: COST TU1404 benchmark. *Construction and Building Materials* 229:116543, 2019. doi:<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.07.269>.
- [2] B. Patzák. OOFEM home page, 2000. <http://www.oofem.org>.
- [3] A. H. Bryant, C. Vadhanavikkit. Creep, shrinkage-size, and age at loading effects. *ACI Materials Journal* 84:117–123, 1987.
- [4] Z. P. Bažant, L. J. Najjar. Nonlinear water diffusion in nonsaturated concrete. *Materials and Structures* 5:3–20, 1972. doi:10.1007/BF02479073.
- [5] Fédération Internationale du Béton. *Model Code 2010*. No. vol. 65 in fib Bulletin. International Federation for Structural Concrete (fib), 2012.
- [6] Z. Bažant, P. Havlásek, M. Jirásek. Microprestress-solidification theory: Modeling of size effect on drying creep. In N. Bicanic, H. Mang, G. Meschke, R. de Borst (eds.), *Computational Modelling of Concrete Structures*, pp. 749–758. CRC Press/Balkema, EH Leiden, The Netherlands, 2014.
- [7] Z. P. Bažant, A. P. Hauggaard, S. Baweja, F. J. Ulm. Microprestress solidification theory for concrete creep. I: Aging and drying effects. *Journal of Engineering Mechanics* 123:1188–1194, 1997.
- [8] Z. Bažant, S. Baweja. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures: Model B3. *Adam Neville Symposium: Creep and Shrinkage - Structural Design Effects 2000*.
- [9] P. Havlásek. *Creep and Shrinkage of Concrete Subjected to Variable Environmental Conditions, PhD. Thesis*. Czech Technical University in Prague, 2014.

# Testování fázové stability vícesložkových směsí s využitím metod globální optimalizace

Bc. Martin Jex

Katedra matematiky FJFI ČVUT, jexmarti@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** V příspěvku se zabýváme rovnováhou fází ve směsích látek v proměnných VTN. Přesněji máme u směsi zadané počáteční molární koncentrace  $\mathbf{c}^*$  a teplotu  $T^*$  a máme rozhodnout, zda směs zůstane v jedné fázi, nebo dojde ke štepení do více fází. Tento fyzikálně motivovaný problém lze převést na matematický problém optimalizace nekonvexní funkce ( $TPD$ ) na konvexní množině (vnitřek simplexu) [2]. Optimalizační problém je řešen pomocí algoritmu větví a mezí [3], ve kterém se využívá konvexní spodní odhad funkce  $TPD$ . Tento odhad je vytvořen pomocí konvexně konkávního rozkladu a je optimalizován, aby se v jistém smyslu, co nejméně lišil od původní  $TPD$  funkce. Algoritmus je implementován v Mathematice a je ilustrován na 3 příkladech s různými stupni složitosti. Dále je diskutována jeho výpočetní složitost. Námi implementovaný algoritmus dává konzistentní výsledky s [1], který upřesňuje výsledky nalezené v [4].

## Literatura:

- [1] Smejkal T.; Mikyška J. *VTN-phase stability testing using the Branch and Bound strategy and the convex-concave splitting of Helmholtz free energy density*. Fluid Phase Equilibria, 504, 2020.
- [2] Mikyška, J.; Firoozabadi A. *Investigation of Mixture Stability at Given Volume, temperature and number of moles*. Fluid Phase Equilibria, 321, 1-9, 2012.
- [3] Locatelli M.; Schoen F. *Global optimization - Theory, Algorithms, and Applications*. SIAM Philadelphia, 2013.
- [4] Smejkal T.; Mikyška J. *Unified presentation and comparison of various formulations of the phase stability and phase equilibrium calculation problems*. Fluid Phase Equilibria, 476, 61-88, 2018.

# Rozpoznávání ultrazvukových signálů pomocí konvolučních neuronových sítí

Martin Kovanda

Katedra matematiky FJFI ČVUT, kovanma2@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** V této práci jsou shrnuty základní architektury neuronových sítí a možnosti použití vrstevnatých a konvolučních neuronových sítí (CNN) na rozpoznávání ultrazvukových signálů. Za tímto účelem jsou porovnávány architektury, které se navzájem liší hodnotami užitých hyper-parametrů. Těmi jsou například celkový počet neuronů v síti spolu s počtem použitých vrstev. Dále je znázorněn přínos použití L2 regularizace, dropoutu a svazkové normalizace za účelem potlačení přeučení sítě. V případě CNN jsou pak tyto regularizace porovnávány zvlášť pro konvoluční i vrstevnatou část sítě. Použití CNN je umožněno zpracováním ultrazvukového signálu pomocí časo-frekvenční transformace. Za tímto účelem byl testován tzv. *HFD spektrogram*, pomocí kterého byly ultrazvukové signály transformovány do tenzorové podoby s využitím různě volených parametrů. Na takto transformovaných signálech byly úspěšně testovány CNN pro identifikaci 11 různých letových režimů vrtulníku.

**Poděkování.** Chtěl bych zde poděkovat svému školiteli Ing. Milanu Chladovi, Ph.D., za trpělivost, pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce.

## Literatura:

- [1] François Chollet. *Deep learning with Python*. OCLC: ocn982650571. Shelter Island, New York: Manning Publications Co, 2018. ISBN: 9781617294433.
- [2] *The Math Behind Backpropagation / Big Theta*. URL: <https://bigtheta.io/2016/02/27/the-math-behind-backpropagation.html> (cit. 04. 03. 2020).
- [3] Daniel Godoy. *Understanding binary cross-entropy / log loss: a visual explanation*. en. Ún. 2019. URL: <https://towardsdatascience.com/understanding-binary-cross-entropy-log-loss-a-visual-explanation-a3ac6025181a> (cit. 14. 03. 2020).
- [4] *Keras Documentation*. URL: <https://keras.io/> (cit. 04. 03. 2020).
- [5] Ian Goodfellow, Yoshua Bengio a Aaron Courville. *Deep Learning*. <http://www.deeplearningbook.org>. MIT Press, 2016.
- [6] George Seif. *Understanding the 3 most common loss functions for Machine Learning Regression*. en. Červ. 2019. URL: <https://towardsdatascience.com/understanding-the-3-most-common-loss-functions-for-machine-learning-regression-23e0ef3e14d3> (cit. 10. 03. 2020).
- [7] *Visual Information Theory – colah’s blog*. URL: <http://colah.github.io/posts/2015-09-Visual-Information/> (cit. 14. 03. 2020).



- [8] Nitish Srivastava et al. “Dropout: A Simple Way to Prevent Neural Networks from Overfitting”. In: *Journal of Machine Learning Research* 15.56 (2014), s. 1929–1958. ISSN: 1533-7928. URL: <http://jmlr.org/papers/v15/srivastava14a.html> (cit. 15. 03. 2020).
- [9] Sergey Ioffe a Christian Szegedy. “Batch Normalization: Accelerating Deep Network Training by Reducing Internal Covariate Shift”. In: *arXiv:1502.03167 [cs]* (břez. 2015). arXiv: 1502.03167. URL: <http://arxiv.org/abs/1502.03167> (cit. 14. 04. 2020).
- [10] Glorot Xavier a Bengio Yoshua. *Understanding the difficulty of training deep feedforward neural networks*. en. publisher: DIRO, Université de Montréal, Montréal, Québec, Canada. URL: <http://proceedings.mlr.press/v9/glorot10a/glorot10a.pdf> (cit. 03. 03. 2020).
- [11] Daniel Godoy. *Hyper-parameters in Action! Part II - Weight Initializers*. en. Pros. 2018. URL: <https://towardsdatascience.com/hyper-parameters-in-action-part-ii-weight-initializers-35aee1a28404> (cit. 03. 03. 2020).
- [12] *Xavier Initialization* · Manas George. URL: <https://mnsgrg.com/2017/12/21/xavier-initialization/> (cit. 03. 03. 2020).
- [13] James Dellinger. *Weight Initialization in Neural Networks: A Journey From the Basics to Kaiming*. en. Dub. 2019. URL: <https://towardsdatascience.com/weight-initialization-in-neural-networks-a-journey-from-the-basics-to-kaiming-954fb9b47c79> (cit. 03. 03. 2020).
- [14] *Initializers - Keras Documentation*. URL: <https://keras.io/initializers/> (cit. 03. 03. 2020).
- [15] Kaiming He et al. “Delving Deep into Rectifiers: Surpassing Human-Level Performance on ImageNet Classification”. In: *arXiv:1502.01852 [cs]* (ún. 2015). arXiv: 1502.01852. URL: <http://arxiv.org/abs/1502.01852> (cit. 03. 03. 2020).
- [16] Achraf KHAZRI. *Self Organizing Maps*. en. Srp. 2019. URL: <https://towardsdatascience.com/self-organizing-maps-1b7d2a84e065> (cit. 04. 03. 2020).
- [17] Eklavya. *Kohonen Self-Organizing Maps*. en. Řij. 2019. URL: <https://towardsdatascience.com/kohonen-self-organizing-maps-a29040d688da> (cit. 04. 03. 2020).
- [18] Filippo Galli. *Hopfield Networks are useless. Here’s why you should learn them*. en. Dub. 2019. URL: <https://towardsdatascience.com/hopfield-networks-are-useless-heres-why-you-should-learn-them-f0930ebeatcd> (cit. 04. 03. 2020).
- [19] Raúl Rojas. *Neural Networks: a Systematic Introduction*. English. OCLC: 1086530934. 1996. ISBN: 9783642610684. URL: <https://public.ebookcentral.proquest.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=3093727> (cit. 04. 03. 2020).
- [20] Klaus Greff et al. “LSTM: A Search Space Odyssey”. In: *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* 28.10 (řij. 2017). arXiv: 1503.04069, s. 2222–2232. ISSN: 2162-237X, 2162-2388. DOI: [10.1109/TNNLS.2016.2582924](https://doi.org/10.1109/TNNLS.2016.2582924). URL: <http://arxiv.org/abs/1503.04069> (cit. 04. 03. 2020).

- [21] *Neural Networks - History*. URL: <https://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/neural-networks/History/history1.html> (cit. 04. 03. 2020).
- [22] Akshay L. Chandra. *Perceptron Learning Algorithm: A Graphical Explanation Of Why It Works*. en. Zář. 2018. URL: <https://towardsdatascience.com/perceptron-learning-algorithm-d5db0deab975> (cit. 04. 03. 2020).
- [23] Akshay L. Chandra. *Perceptron: The Artificial Neuron (An Essential Upgrade To The McCulloch-Pitts Neuron)*. en. Zář. 2018. URL: <https://towardsdatascience.com/perceptron-the-artificial-neuron-4d8c70d5cc8d> (cit. 04. 03. 2020).
- [24] vibhor nigam. *Understanding Neural Networks. From neuron to RNN, CNN, and Deep Learning*. en. Ún. 2020. URL: <https://towardsdatascience.com/understanding-neural-networks-from-neuron-to-rnn-cnn-and-deep-learning-cd88e90e0a90> (cit. 04. 03. 2020).
- [25] *Introduction to Optimization with Genetic Algorithm*. en. URL: <https://www.linkedin.com/pulse/introduction-optimization-genetic-algorithm-ahmed-gad> (cit. 14. 03. 2020).
- [26] Vijini Mallawaarachchi. *Introduction to Genetic Algorithms — Including Example Code*. en. Břez. 2020. URL: <https://towardsdatascience.com/introduction-to-genetic-algorithms-including-example-code-e396e98d8bf3> (cit. 14. 03. 2020).
- [27] Swanand Mhalagi. *The Quest of Higher Accuracy for CNN Models*. en. Květ. 2019. URL: <https://towardsdatascience.com/the-quest-of-higher-accuracy-for-cnn-models-42df5d731faf> (cit. 14. 03. 2020).
- [28] Matt Harvey. *Let's evolve a neural network with a genetic algorithm—code included*. en. Dub. 2017. URL: <https://blog.coast.ai/lets-evolve-a-neural-network-with-a-genetic-algorithm-code-included-8809bece164> (cit. 14. 03. 2020).
- [29] Jiwon Jeong. *The Most Intuitive and Easiest Guide for CNN*. en. Čvc 2019. URL: <https://towardsdatascience.com/the-most-intuitive-and-easiest-guide-for-convolutional-neural-network-3607be47480> (cit. 15. 03. 2020).
- [30] *Convolutional Layers - Keras Documentation*. URL: <https://keras.io/layers/convolutional/> (cit. 16. 03. 2020).
- [31] Mukul Rathi. *Backpropagation in a Convolutional Neural Network*. en. URL: <https://mukulrathi.com/demystifying-deep-learning/conv-net-backpropagation-maths-intuition-derivation/> (cit. 01. 04. 2020).

# Matematické modelování proudění tekutin a transportu kontrastní látky v cévách

Jan Kovář

Katedra matematiky FJFI ČVUT, kovarj29@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** Tato práce se zabývá matematickým modelováním úloh spojených s vyšetřením perfuze myokardu za použití kontrastní látky. Úloha proudění a transportu kontrastní látky je v úvodu rozdělena do třech základních typových úloh, z nichž dvě jsou řešeny v rámci této práce.

Čtenáři je představen matematický model proudění newtonovské nestlačitelné kapaliny v izotermálním rigidním porézním prostředí a v izotermálním volném prostředí. Hlavním cílem této práce je řešení úlohy jednofázového proudění a transportu kontrastní látky v porézním prostředí představující srdeční svalovinu a v dvourozměrné oblasti reprezentující svými rozměry cévu krevního řečiště za použití mřížkové Boltzmannovy metody.

Mřížková Boltzmannova metoda byla úspěšně aplikována pro řešení zmíněných úloh a získané výsledky jsou v souladu s výsledky obdrženy pomocí metody konečných diferencí, či smíšené hybridní metody konečných prvků.

## Literatura:

- [1] A. N. Cookson, et al., A spatially-distributed computational model to quantify behaviour of contrast agents in MR perfusion imaging. *Medical image analysis* 18(7), 2014, 1200-1216.
- [2] T. Krüger, et al., *The lattice Boltzmann method*. Springer International Publishing 10, 2017, 978-993.
- [3] Z. Guo, S. Chang, *Lattice Boltzmann method and its applications in engineering*. World Scientific, 2013.
- [4] J. Bear, *Modeling phenomena of flow and transport in porous media*. Springer, 2018.
- [5] Z. Chen, G. Huan, Y. Ma, *Computational methods for multiphase flows in porous media*. *Computational Science and Engineering – Svazek 2*, SIAM, 2006.

# Guaranteed Two-sided Bounds on all Eigenvalues of Preconditioned Diffusion and Elasticity Problems Solved by the Finite Element Method

Martin Ladecký<sup>\*†‡</sup>, Ivana Pultarová<sup>†</sup>, Jan Zeman<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>Department of Mathematics, Faculty of Civil Engineering, CTU in Prague

\*martin.ladecky@fsv.cvut.cz

<sup>‡</sup>Department of Mechanics, Faculty of Civil Engineering, CTU in Prague

**Abstract.** A method of characterizing all eigenvalues of a preconditioned discretized scalar diffusion operator with Dirichlet boundary conditions has been recently introduced in Gergelits, Mardal, Nielsen, and Strakoš (2019). Motivated by this paper, we offer a slightly different approach that extends the previous results in some directions. Namely, we provide bounds on all increasingly ordered eigenvalues of a general diffusion or elasticity operator with tensor data, discretized with the conforming finite element method, and preconditioned by the inverse of a matrix of the same operator with different data. Our results hold for mixed Dirichlet and Robin or periodic boundary conditions applied to the original and preconditioning problems. The bounds are two-sided, guaranteed, easily accessible, and depend solely on the material data.

**Acknowledgement.** The authors acknowledge the financial support received from the Center of Advanced Applied Sciences, the European Regional Development Fund (project No.CZ.02.1.01/0.0/0.0/16 019/0000778). Martin Ladecký was supported also by the Grant Agency of the Czech Technical University in Prague (project No.SGS20/002/OHK1/1T/11) and by the Czech Science Foundation (project No. 20-14736S).

## References:

- [1] *P. G. Ciarlet*: Mathematical Elasticity. Volume I: Three-Dimensional Elasticity. Elsevier, Amsterdam, 1987. MR0936420
- [2] *A. Ern, J.-L. Guermond*: Theory and Practice of Finite Elements. Springer, New York, 2004. Zbl 1059.65103, MR2050138
- [3] *T. Gergelits, K.-A. Mardal, B. F. Nielsen, Z. Strakoš*: Laplacian preconditioning of elliptic PDEs: Localization of the eigenvalues of the discretized operator. SIAM Journal on Numerical Analysis. **57** (2019), 1369–1394. MR3961990
- [4] *J. Liesen, Z. Strakoš*: Krylov subspace methods: principles and analysis. Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, Oxford, 2012. Zbl 1263.65034, MR3024841
- [5] *A. J. Wathen*: Preconditioning. Acta Numerica. **24** (2015), 329–376. MR3349311

# Matematické modelování fázového rozhraní metodou lattice Boltzmann

Michal Malík

Katedra matematiky FJFI ČVUT, malikmi3@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** Záměrem této práce je sledování vývoje rozhraní mezi dvěma fázemi pomocí mřížkové Boltzmannovy metody (LBM). V práci popíšeme numerický model a zaměříme se více na výpočet normálového vektoru. Numerický model otestujeme na několika úlohách. Více se budeme věnovat dvěma úlohám, konkrétně vývoji rozhraní ve tvaru kružnice při diagonálním posunu a vývoji rozhraní ve tvaru Zalesakova disku v rotačním rychlostním poli. Pro tyto dvě úlohy jsme určili experimentální řády konvergence. V případě diagonálního posunu kruhu metoda konverguje rychlostí druhého řádu. Na úloze Zálesákova disku jsme pozorovali rozdílný řád konvergence v závislosti na výpočtu normy. Řád konvergence se v závislosti na normě pohyboval mezi hodnotami 1, 2. Ze získaných výsledků lze usoudit, že pro konstantní rychlostní pole je LBM metoda druhého řádu. Pokud je rychlostní pole komplikovanější, řád konvergence se snižuje až na hodnotu 1. Toto pozorování je podkladem pro další studium této metody.

**Poděkování.** Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli Ing. Pavlovi Eichlerovi za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce. Dále děkuji svému konzultantovi Ing. Radkovi Fučíkovi, Ph.D. za cenné rady a poznámky k danému tématu a Ing. Jakubovi Klinkovskému za pomoc s přístupem na výpočetní zařízení Katedry matematiky na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské, České vysoké učení technické v Praze. Nakonec bych chtěl poděkovat prof. Michalovi Benešovi za věcné poznámky k metodě fázového pole.

## Literatura:

- [1] Adalsteinsson, David; Sethian, James A. A fast level set method for propagating interfaces. *J. Comput. Phys*, 1994, roč. 118, č. 2.
- [2] Beneš, M.. *Phase field model of microstructure growth in solidification of pure substances*. Dizertační práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 1997.
- [3] Beneš, M.. *Matematické modelování procesu tuhnutí v krystalických materiálech pomocí nelineárních parciálních diferenciálních rovnic*. Habilitační práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 2001.
- [4] Boettinger, William J; Warren, James A; Beckermann, Christoph; Karma, Alain. Phase-field simulation of solidification. *Annual review of materials research*, 2002, roč. 32, č. 1, s. 163–194.

- [5] Brennen, Christopher Earls; Brennen, Christopher E. *Fundamentals of multiphase flow*. Cambridge university press, 2005.
- [6] Chiu, Pao-Hsiung; Lin, Yan-Ting. A conservative phase field method for solving incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 2011, roč. 230, č. 1, s. 185–204.
- [7] Dvořák, P.. *Matematické modelování mikrostruktur při fázových přechodech*. Diplomová práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 2010.
- [8] Eichler, P.. *Matematické modelování subsonického proudění okolo překážek pomocí metody Lattice-Boltzmann na GPU*. Bakalářská práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 2016.
- [9] Eichler, P.. *Matematické modelování interakce elastického tělesa s nestlačitelnou tekutinou*. Diplomová práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 2018.
- [10] Folch, R.; Casademunt, J.; Hernández-Machado, A.; Ramirez-Piscina, L.. Phase-field model for Hele-Shaw flows with arbitrary viscosity contrast. I. Theoretical approach. *Physical Review E*, 1999, roč. 60, č. 2, str. 1724.
- [11] Gebäck, Tobias; Heintz, Alexei. A lattice Boltzmann method for the advection-diffusion equation with Neumann boundary conditions. *Communications in Computational Physics*, 2014, roč. 15, č. 2, s. 487–505.
- [12] Geier, Martin; Fakhari, Abbas; Lee, Taehun. Conservative phase-field lattice Boltzmann model for interface tracking equation. *Physical Review E*, 2015, roč. 91, č. 6, str. 063309.
- [13] Gruszczyński, G; Mitchell, T; Leonardi, C; Barber, T; aj. A cascaded phase-field lattice Boltzmann model for the simulation of incompressible, immiscible fluids with high density contrast. *Computers & Mathematics with Applications*, 2020, roč. 79, č. 4, s. 1049–1071.
- [14] Guo, Zhaoli; Shu, Chang. *Lattice Boltzmann method and its applications in engineering*, roč. 3. World Scientific, 2013.
- [15] Gurtin, Morton E. On the Two-Phase Stefan Problem with Interfacial Energy and Entropy. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 96:200-240, 1986.
- [16] Huang, Haibo; Sukop, Michael; Lu, Xiyun. *Multiphase lattice Boltzmann methods: Theory and application*. John Wiley & Sons, 2015.
- [17] Karlin, Ilya V; Ferrante, Antonio; Öttinger, Hans Christian. Perfect entropy functions of the lattice Boltzmann method. *EPL (Europhysics Letters)*, 1999, roč. 47, č. 2, str. 182.

- [18] Krüger, Timm; Kusumaatmaja, Halim; Kuzmin, Alexandr; Shardt, Orest; Silva, Goncalo; Vigggen, Erlend Magnus. The lattice Boltzmann method. *Springer International Publishing*, 2017, roč. 10, s. 978–3.
- [19] Kvasnica, Jozef. *Termodynamika*. Státní nakladatelství technické literatury, 1965.
- [20] Siqveland, Leiv Magne; Skjaeveland, Svein. Derivations of the Young–Laplace equation. *Unpublished Research*, 2014.
- [21] Sousa, Antonio; Nabovati, A.. LBM mesoscale modelling of porous media. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 06 2008, roč. 61, doi:10.2495/HT080061.
- [22] Strachota, Pavel. *Analysis and Application of Numerical Methods for Solving Nonlinear Reaction-Diffusion Equations*. Dizertační práce, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, ČVUT v Praze, 2012.
- [23] Sun, Ying; Beckermann, Christoph. Sharp interface tracking using the phase-field equation. *Journal of Computational Physics*, 2007, roč. 220, č. 2, s. 626–653.

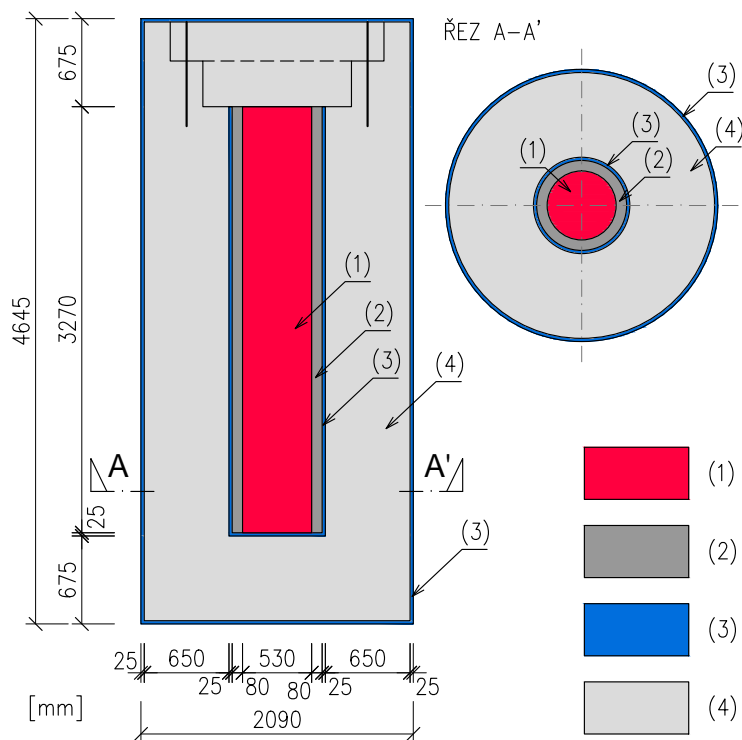
# Numerická analýza vývoje teploty v betonovém kontejneru úložiště vyhořelého jaderného paliva se zohledněním vlivu hydratačního tepla

Karolina Nedomová\*

\*Katedra betonových a zděných konstrukcí FSv ČVUT, karolina.nedomova@fsv.cvut.cz

**Abstrakt.** Příspěvek popisuje numerickou analýzu vývoje teploty v betonovém kontejneru úložiště vyhořelého jaderného paliva. Jako zdroj tepla, způsobující ohřívání jak vlastního kontejneru, tak přilehlého horninového masivu hlubinného úložiště, je uvažováno jednak vyhořelé jaderné palivo, jednak (což se projeví zejména v raných fázích po naplnění a uzavření kontejneru) hydratační teplo v betonové zálivce. V příspěvku je podrobně popsán matematický model nestálého sdílení tepla formulovaný v polárních souřadnicích a jeho numerické řešení. Výsledný algoritmus je naprogramován v jazyce Python. Vytvořený výpočetní nástroj je použit pro numerické simulace analyzovaného problému. Dosažené výsledky jsou graficky prezentovány a budou využity pro podrobný návrh konstrukce kontejneru a pro analýzu jeho dlouhodobého chování.

**Klíčová slova:** Teplotní analýza, betonový kontejner, vyhořelé jaderné palivo, hydratační teplo.



Obrázek 1: Konstrukce analyzovaného kontejneru. Legenda: (1) nerezové pouzdro s vyhořelým jaderným palivem typu VVER-440, (2) betonová zálivka, (3) ocel, (4) beton tlumící zóny. Zdroj: nakresleno podle návrhu Dr. Khmurovské.



**Poděkování.** Příspěvek byl vypracován za podpory Technologické agentury České republiky, projekt č. TJ04000186, a Studentské grantové soutěže ČVUT, projekt č. SGS20/041/OHK1/1T/11.

### **Literatura:**

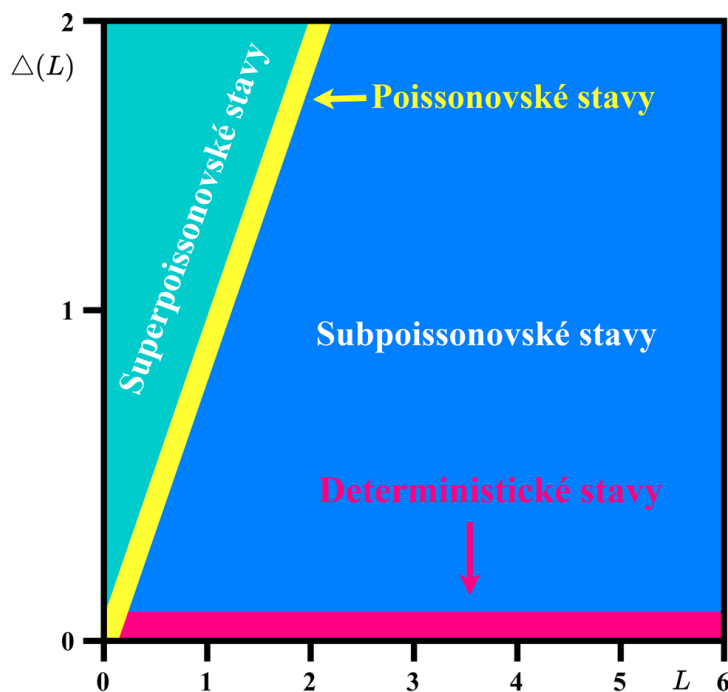
- [1] Bažant, Z. P.; Jirásek, M.: Creep and Hygrothermal Effects in Concrete Structures. Springer, 2018, doi:10.1007/978-94-024-1138-6.
- [2] Beneš, M.; Štefan, R.: Homogenization of transport processes and hydration phenomena in fresh concrete. Acta Polytechnica, ročník 60, č. 1, 2020: s. 12-24, doi:10.14311/AP.2020.60.0012.
- [3] EN 1994-1-2 (2005), Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures – Part 1-2: General rules – Structural fire design, CEN.
- [4] Jendele, L.; Šmilauer, V.; Červenka, J.: Multiscale hydro-thermo-mechanical model for early-age and mature concrete structures. Adv. Eng. Softw., ročník 72, 2014: s. 134-146, doi:10.1016/j.advengsoft.2013.05.002.
- [5] Kobyłka, D.: Optimalizace vzájemné vzdálenosti ÚOS. Technická zpráva číslo 135/2017. SÚRAO, 2019.
- [6] Nedomová, K.; Štefan, R.; Beneš, M.: Numerická analýza vývoje teploty v betonovém kontejneru úložiště vyhořelého jaderného paliva typu VVER-440. In PhD Workshop 2020, Praha: ČVUT v Praze, Fakulta stavební, katedra betonových a zděných konstrukcí, 2020.
- [7] Pospíšková, I., Vokál, A., Fiedler, F., Prachař, I. and Kotnour, P. (2012), Aktualizace referenčního projektu hlubinného úložiště radioaktivních odpadů v hypotetické lokalitě. Průvodní zpráva, UJV Řež, a.s.
- [8] Rektorys, K.: The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations. D. Reidel, 1982.
- [9] Weetjens, E. (2009), Update of the near field temperature evolution calculations for disposal of UNE-55, MOX-50 and vitrified HLW in a supercontainer-based geological repository. External Report SCK CEN-ER-86, 09/EWe/P-20, SCK CEN.

# Supernáhodné stavy termodynamického dopravního plynu a jejich matematické vlastnosti

Bc. Vít Pánek

AMSM - FJFI ČVUT, panekvit@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** Tato práce se zabývá modelem termodynamického dopravního plynu, rozptylem světlostí v dopravních datech a supernáhodnými stavy v teorii dopravy. Část práce je věnována úvodu do statistického odhadování odstupů vozidel a jeho historii. Dále se věnuje modelu termodynamického dopravního plynu a jeho matematickým vlastnostem. Příslušné distribuce světlostí jsou popsány funkcemi ze třídy GIG, která je obzvláště vhodná pro studium mikrostruktury dopravních toků. Tato práce obsahuje vylepšené důkazy vět z matematiky částicových systémů a odhaluje nové rovnosti. Dále zahrnuje algoritmickou realizaci systému, jehož stav je supernáhodný. Supernáhodné stavy v teorii dopravy a jejich distribuce světlostí nebyly blíže popsány a jejich zkoumání je zcela nová disciplína v tomto oboru.



V částicových systémech lze klasifikovat stavy systému dle míry náhodnosti. Na obrázku můžeme vidět statistickou rigiditu  $\Delta(L)$  v závislosti na délce pozorovaného intervalu a několik barevně rozlišených stavů náhodnosti. Nás však bude nejvíce zajímat ten superpoissonovský nebo-li supernáhodný.

## Literatura:

- [1] Kerner, B.S., 2004. *The Physics of Traffic*, Springer-Verlag, New York.
- [2] Krbálek M., Krbálková M., 2018., 3s-Unification for Vehicular Headway Modeling, J. Phys. A: Math. Theor. 40(2007) 5813-5821.
- [3] Krbálek, M., 2007. Equilibrium distributions in a thermodynamical traffic gas. J. Phys. A: Math. Theor. 40 (22), 5813–5821.
- [4] Krbálek, Milan. Theoretical predictions for vehicular headways and their clusters, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013), 445101.
- [5] Li, L., Chen, X.M., 2017. Transportation Research Part C 76, 170.
- [6] Luttinen, Tapio. (1999). Properties of Cowan's M3 Headway Distribution. Transportation Research Record. 1678. 189-196.
- [7] Scharf, Rainer and Izrailev, Felix. (1999). Dyson's Coulomb gas on a circle and intermediate eigenvalue statistics. Journal of Physics A: Mathematical and General. 23. 963.
- [8] X. Chen, L. Li and Y. Zhang, "A Markov Model for Headway/Spacing Distribution of Road Traffic," in IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, vol. 11, no. 4, pp. 773-785, Dec. 2010.
- [9] Yajie Zou and Hang Yang and Yunlong Zhang and Jinjun Tang and Weibin Zhang.: *Mixture modeling of freeway speed and headway data using multivariate skew-t distributions*. Transportmetrica A: Transport Science, vol. 13, num. 7, 657-678, 2017, Taylor and Francis.
- [10] Yajie Zou, Yunlong Zhang, Xinxin Zhu (2014) Constructing a bivariate distribution for freeway speed and headway data, Transportmetrica A: Transport Science, 10:3, 255-272.

# Global optimality in minimum compliance topology optimization of frames and shells by moment-sum-of-squares hierarchy

Marek Tyburec\*, Jan Zeman\*\*, Martin Kružík<sup>†</sup>, Didier Henrion<sup>‡</sup>

\*Department of Mechanics, FCE CTU in Prague, marek.tyburec@cvut.cz

\*\*Department of Mechanics, FCE CTU in Prague, Jan.Zeman@cvut.cz

<sup>†</sup>Department of Physics, FCE CTU in Prague, kruzik@utia.cas.cz

<sup>‡</sup> LAAS-CNRS, Toulouse, henrion@laas.fr

**Abstract.** The design of minimum-compliance bending-resistant structures with continuous cross-section parameters is a challenging task because of its inherent non-convexity. Our contribution develops a strategy that facilitates computing all guaranteed globally optimal solutions for frame and shell structures under multiple load cases and self-weight. To this purpose, we exploit the fact that the stiffness matrix is usually a polynomial function of design variables, allowing us to build an equivalent non-linear semidefinite programming formulation over a semi-algebraic feasible set. This formulation is subsequently solved using the Lasserre moment-sum-of-squares hierarchy, generating a sequence of outer convex approximations that monotonically converges from below to the optimum of the original problem. Globally optimal solutions can subsequently be extracted using the Curto-Fialkow flat extension theorem. Furthermore, we show that a simple correction to the solutions of the relaxed problems establishes a feasible upper bound, thereby deriving a simple sufficient condition of global  $\varepsilon$ -optimality. When the original problem possesses a unique minimum, we show that this solution is found with a zero optimality gap in the limit. These theoretical findings are illustrated on several examples of topology optimization of frames and shells, for which we observe that the hierarchy converges in a finite (rather small) number of steps.

**Acknowledgement.** Marek Tyburec acknowledges the financial support by the Czech Technical University in Prague, received through the grant No. SGS20/039/OHK1/1T/11.

## Literature:

- [1] Curto, R. E. and Fialkow, L. A. Solution of the truncated complex moment problem for flat data. *Mem. Am. Math. Soc.*, 119(568), 1996. doi: 10.1090/memo/0568.
- [2] Henrion, D. and Lasserre, J.-B. Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 51(2):192–202, 2006. doi: 10.1109/tac.2005.863494.

# Efektivita aritmetických algoritmů v nestandardních číselných soustavách

Pavla Veselá

Katedra matematiky FJFI ČVUT, Pavla.Vesela@fjfi.cvut.cz

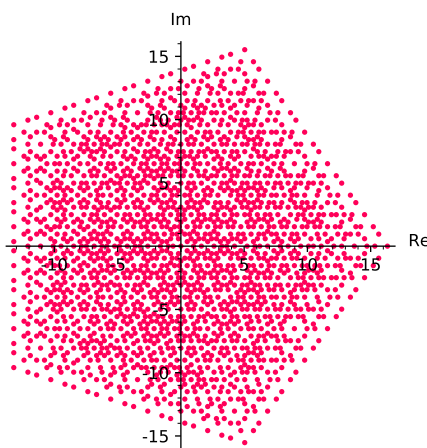
**Abstrakt.** Nestandardní číselné systémy jsou dané svou bází  $\beta$  (libovolné komplexní číslo  $|\beta| > 1$ ) a svou abecedou cifer  $A \subset \mathbb{C}$ . Komplexní číslo  $z$  potom reprezentujeme ve tvaru

$$z = \sum_{j=-\infty}^k a_j \beta^j, \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \text{ a } a_j \in A.$$

Pro efektivní počítání základních aritmetických operací v těchto číselných systémech lze využít algoritmy pro paralelní sčítání a on-line násobení a dělení. Tyto algoritmy byly představeny v [1, 4] a dále modifikovány v [3, 2]. V této práci zkoumáme podmínky na proveditelnost těchto operací v závislosti na vlastnostech spektra číselného systému definovaného jako

$$X^A(\beta) = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k \beta^k : n \in \mathbb{N}, a_k \in A \right\}.$$

Dále jsme implementovali algoritmus pro tzv. předzpracování dělitelů pro on-line dělení, který jsme poté použili na několik vybraných číselných systémů s danou bází. Konkrétně jsme vyřešili číselné systémy s bází kvadratické Pisotovo číslo,  $d$ -Bonacciho číslo, Penneyho a Eisensteinovo číslo.



Obrázek 1: Část spektra číselného systému s bází zlatý řez  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  a abecedou obsahující pravidelný pětiúhelník a počátek.

**Poděkování.** Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS20/183/OHK4/3T/14

## Literatura:

- [1] AVIZIENIS, A. Signed-digit number representations for fast parallel arithmetic. *IRE Trans. Electron. Comput.* 10 (1961), 389–400.
- [2] FROUGNY, C., PAVELKA, M., PELANTOVÁ, E., AND SVOBODOVÁ, M. On-line algorithms for multiplication and division in real and complex numeration systems. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* 21, 3 (2019), Paper No. 14.
- [3] FROUGNY, C., PELANTOVÁ, E., AND SVOBODOVÁ, M. Parallel addition in non-standard numeration systems. *Theoret. Comput. Sci.* 412 (02 2011).
- [4] TRIVEDI, K., AND ERCEGOVAC, M. On-line algorithms for division and multiplication. *IEEE Trans. Comput. C-26* (08 1977), 681 – 687.

# Asymptotické vlastnosti statistické rigidity v částicových systémech s balanční vlastností

Daniel Wohlrath\*

\*Katedra matematiky FJFI ČVUT, wohlrddan@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** Cílem práce je rozvinout aktuální teoretický aparát používaný pro vědeckou oblast nazývanou Vehicular Headway Modelling pojednávající o statistickém modelování rozestupů vozidel v dopravním proudu. V posledních letech se ukázalo, že distribuce, jež se při modelování dopravní struktury uplatňují, přináležejí do méně probádané distribuční třídy tzv. balancovaných hustot.

Za praktický cíl této práce jsme si vytknuli prověřit, zda hypotéza o balančním chvostu koresponduje s trendem empirických dopravních hustot. Teoretickým záměrem práce bylo formalizovat teorii balančních částicových systémů v podoblasti charakteristik druhého řádu, jakými jsou statistická rigidita či kompresibilita. Pro učebnicovou variantu balančního částicového systému (systém s erlangovským generátorem) bylo cílem odvodit obecnou závislost kompresibility na parametrech generátoru.

## Literatura:

- [1] D. J. Daley, N. R. Mohan. *Asymptotic Behaviour of the Variance of Renewal Processes and Random Walks*. The Annals of Probability, 516–521, 1978.
- [2] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Wiley India Pvt. Limited, 1968.
- [3] D. Helbing. *Traffic and related self-driven many-particle systems*. Rev. Mod. Phys. 73, 2001.
- [4] O. Kollert, M. Krbálek, T. Hobza, M. Krbálková. *Statistical rigidity of vehicular streams—theory versus reality*. Journal of Physics Communications.
- [5] M. Krbálek, M. Krbálková. *3s-Unification for Vehicular Headway Modeling*. Proceedings of SPMS 2018, Dobřichovice 2018.
- [6] M. Krbálek, P. Šeba. *Spectral rigidity of vehicular streams (Random Matrix Theory approach)*. J. Phys. A: Math. Theor. 42, 2009.
- [7] L. Li, X. M. Chen. *Vehicle headway modeling and its inferences in macroscopic/microscopic traffic flow theory: A survey*, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 170–188, 2017.
- [8] S. Maghsoodloo, D. Helvaci. *Renewal and Renewal-Intensity Functions with Minimal Repair*. Journal of Quality and Reliability Engineering, 2014.

- [9] S. M. Ross. *Renewal Theory and Its Applications*. Introduction to Probability Models. Elsevier, 421 - 495, 2010.
- [10] S. M. Ross. Renewal Theory. In: *Stochastic Processes*. 2nd ed. Wiley, 98-161, 1996.
- [11] W. L. Smith. Infinitesimal renewal processes. In: *Contributions to Probability and Statistics*. Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1960.
- [12] R. M. Soland. *Letter to the Editor—Availability of Renewal Functions for Gamma and Weibull Distributions with Increasing Hazard Rate*. Operations Research 17(3):536-543, 1969.
- [13] S. Täcklind. *Fourieranalytische behandlung vom erneuerungsproblem*. Scandinavian Actuarial Journal, vol. 1945, no. 1-2, 68–105, 1945.
- [14] P. Tišnovský. *Hrátky se systémem LÖVE - částicové systémy*. 2009, cit. 2020-03-15, [<https://www.root.cz/clanky/hratky-se-systemem-love-casticove-systemy/>].



# Úvod do teorie kooperativních her: teoretická a experimentální studie

Bc. Dominika Zogatová\*, Ing. René Levínský, PhD.‡

\*Katedra matematiky FJFI ČVUT, zogatdom@fjfi.cvut.cz

‡Center for Economic Research and Graduate Education (CERGE),  
rene.levinsky@gmail.com

**Abstrakt.** Tato bakalářská práce slouží jako úvod do kooperativních her. Speciálně se zaměřuje na hry s přenosnou výhrou. Jsou to takové hry, ve kterých hráči mohou tvořit koalice, ve kterých hrají a následnou výhru si mezi sebou rozdělí. Tato práce prezentuje a axiomatizuje několik řešení takovýchto situací, a prezentuje jejich použití na jednoduché hře tří hráčů. Součástí této práce je analýza ekonomického experimentu, který zkoumá vliv neúplnosti informace na vnímání spravedlnosti. Statistická analýza prokázala, že mezi zde zkoumanými řešeními nejlépe reflektuje chování účastníků experimentu v laboratoři Vlastní Shapleyho hodnota. Dále bylo prokázáno, že informace o vlastních schopnostech nebo individuální schopnosti jako takové, nemají vliv na vnímání spravedlnosti subjekty.

## Literatura:

- [1] Abeler, Johannes, Armin Falk, Lorenz Goette, and David Huffman (2011): *Reference Points and Effort Provision*, American Economic Review, 101 (2), 470-92.
- [2] Beal, S., Ferrieres, S., Remila, E., Solal, P. (2018): *The proportional Shapley value and applications*. Games and Economic Behavior, 108, 93-112.
- [3] Besner, M. (2019): *Axiomatizations of the proportional Shapley value*, Theory and Decision 86 (2) 161-183.
- [4] van den Brink, R., Levínský, R., Zelený, M. (2015): *On proper Shapley values for monotone TU-games*. Internat. J. Game Theory, 44(2): 449-471.
- [5] Fischbacher, U. (2007): *z-Tree: Zurich toolbox for ready-made economic experiments* Experimental Economics, 10(2), pp.171-178.
- [6] Gillies, D.B. (1959): *Solutions to general non-zero-sum games V*: Tucker, A.W., Luce, R.D., ed. *Contributions to the Theory of Games IV*. (Annals of Mathematics Studies 40). Princeton: Princeton University Press, 47-85.
- [7] Gul, F. (1989): *Bargaining Foundations of Shapely Value*, Econometrica, 57(1), p.81.

- [8] Harsanyi, J.C (1959): *A bargaining model for the cooperative n-person game*, in: *Contributions To the Theory of Games*, Vol. IV, in: *Annals of Mathematics Studies*, vol. 40, Princeton University Press, Princeton, N.J., 325-355.
- [9] James, L.D., Lee, R.R. (1971): *Economics of water resources planning* McGraw-Hill Book Co., New York, p. xviii, 615.
- [10] Kahneman, D., Knetsch, J. and Thaler, R. (1986): *Fairness and the Assumptions of Economics*. *The Journal of Business*, 59(S4), p.S285.
- [11] Kalai, E., (1977): *Proportional Solutions to Bargaining Situations: Interpersonal Utility Comparisons*. *Econometrica*, 45(7), p.1623.
- [12] Kalai, E. and Smorodinsky, M., (1975): *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*. *Econometrica*, 43(3), p.513.
- [13] Megiddo, N. (1974): *On the Nonmonotonicity of the Bargaining Set, the Kernel and the Nucleolus of Game*. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 27(2), 355-358.
- [14] Moulin, H., (1987): *The Pure Compensation Problem: Egalitarianism Versus Laissez-Fairism*. *The Quarterly Journal of Economics*, 102(4), 769.
- [15] Nash, J., (1950): *The Bargaining Problem*, *Econometrica*, 18(2), p.155.
- [16] Nash, J. (1953): *Two-Person Cooperative Games*. *Econometrica*, 21(1), 128-140. doi: 10.2307/1906951
- [17] von Neumann, J., Morgenstern, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press.
- [18] Owen, G. (1995): *Game Theory*. 3. ed. Academic Press, Inc.
- [19] Schmeidler, D. (1969): *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol 17, No.6, 1163-1170.
- [20] Shapley, L.S. (1953): *A Value for n-person games*. V: Kuhn, H.W., Tucker, A.W., ed. *Contributions to the Theory of Games II*. (*Annals of Mathematics Studies* 28). Princeton: Princeton University Press, 307-317.
- [21] Tversky, A. and Kahneman, D. (1974): *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. *Science*, 185(4157), pp.1124-1131.
- [22] Vorob'ev NN, Liapounov AV (1998): *The proper Shapley value*. In: Petrosyan L, Mazalov M (eds) *Game theory and application*, vol IV. Nova Science, New York, 155-159.
- [23] Young, H. P. (1985): *Monotonic solutions of Cooperative Games*. *International Journal of Game Theory*, 14(2), 65-72.

## **Posudky na soutěžní příspěvky**



Rektorysova soutěž, ročník 2020  
**Posudek**

Téma práce:

**Inverse Analysis of a Stochastic PDE Using Bayes Method**

Autorka práce:

**Bc. Liya Gaynutdinova**

Tématem práce je analýza nejistot v modelech popisovaných pomocí parciálních diferenciálních rovnic. Konkrétně se práce zabývá inverzní úlohou formulovanou jako Bayesovský odhad neznámých parametrů v úloze vedení tepla. Toto téma je pro současný vývoj numerických metod velmi aktuální neboť díky stále dostupnější výpočetní kapacitě umožňuje komplexní řešení inženýrských úloh s nejistotami.

Zpracované téma je velice náročné, neboť vyžaduje sloučení znalostí z různých odvětví matematiky. Studentka musela zvládnout metodu konečných prvků, teorii okolo náhodných polí a jejich rozkladů, numerický výpočet K-L rozkladu, Bayesovský přístup k inverzním úlohám a Metropolisův-Hastingsův algoritmus pro finální generování snímků z a posteriorního rozdělení.

Jádrum práce je Bayesovský přístup, popsanou metodiku lze použít k řešení široké škály inverzních úloh. Zde je aplikována na modelový problém vedení tepla motivovaný praktickou úlohou s měřeními pocházejícími z termokamery. Jako neznámé parametry byly zvoleny parametry materiálu ve formě náhodného pole a parametry Dirichletovy okrajové podmínky. Experimenty jsou vzhledem k vizuální demonstraci zvoleny vhodně. Přínosem studentky je zejména aplikace takto rozsáhlých znalostí na vybrané problémy (což je vzhledem k rozsahu velmi netriviální).

Snaha o sepsání takto rozsáhlé problematiky na několika stranách vedla k občasným nepřesným formulacím a kolizím ve značení. Místy se vyskytuje dříve nedefinované značení a na některých místech se používá velmi podobné značení rozdílných věcí (např.  $A(\xi)$  jakožto realizace materiálového náhodného pole a  $A$  jakožto výsledná konečněprvková matice). Toto může čtenáři neseznámenému s touto tematikou znesnadnit pochopení látky.

Celkově práci hodnotíme velmi kladně, za ocenění stojí především komplexní zpracování moderního tématu od osvojení náročné problematiky, přes implementaci nastudovaných metod až po rozsáhlé numerické experimenty.

V Ostravě dne 6. listopadu 2020



Ing. Michal Béréš  
Ústav geoniky AV ČR



Ing. Simona Domesová  
Ústav geoniky AV ČR

Posudek školitele bakalářské práce  
Lukáše Heribana pro Rektorysovu soutěž 2020  
*Aproximace jednorozměrných relativistických  
bodových interakcí pomocí nelokálních potenciálů*

Matěj Tušek

10. listopadu 2020

Předložená bakalářská práce sestává ze dvou částí. První část (sekce 2 a 3) je teoretická a pojednává o omezených operátorech s důrazem na Hilbertovy-Schmidtovy operátory, dále potom o operátorech neomezených a operátorech k nim sdružených. Student si tak v předstihu vůči studijnímu programu osvojil potřebné vybrané partie funkcionální analýzy. Řada zavedených pojmů je demonstrována na příkladě operátoru násobení maticovou funkcí na jistém  $L^2$ -prostoru. Speciálně jsou připomenuty vlastnosti *Diracova operátoru*, který je samosdružený a unitárně ekvivalentní právě maticovému operátoru násobení.

Druhá část (sekce 4 a 5) je věnována aproximacím tzv. jednorozměrných relativistických bodových interakcí. Tyto bodové interakce jsou matematicky popsány samosdruženými rozšířeními operátoru, který se dostane z jednorozměrného Diracova operátoru zúžením jeho definičního oboru na funkce, které jsou ve vybraném (interakčním) bodě rovny nule. Hledané aproximace potom mají podobu hermitovské poruchy Diracova operátoru. Nejprve jsou připomenuty výsledky pro poruchy, které nabývají tvaru škálovaného operátoru násobení. Následují vlastní výsledky pro poruchy, které obsahují projekci na pevně zvolený škálovaný vektor. Takovéto aproximace byly dosud studovány jen pro dva speciální typy bodových interakcí P. Šebou v roce 1989 [1]. Student byl schopen jeho výsledek zobecnit pro takřka libovolný typ bodové interakce.

Navíc, opět veden Šebovým příkladem, ukázal, že aproximace pomocí projekcí, tj. z fyzikálního pohledu nelokálních potenciálů, jsou přirozenější nežli aproximace pomocí operátoru násobení. V druhém případě je totiž během limitního procesu nutné renormalizovat vazebnou konstantu, v případě nelokálních aproximací však nikoliv. To indikuje důležitý poznatek, že relativistické bodové interakce mají nelokální charakter. Je poctivé zmínit, že právě z tohoto důvodu, mohou být částí fyzikální komunity zamítnuty. Na druhou stranu v posledních letech v souvislosti s objevem grafenu a dalších tzv. diracovských materiálů strmě stoupá poptávka po vhodných efektivních modelech, které jsou dány právě dvourozměrným hamiltoniánem Diracova typu. V modelech s translační invariancí potom stačí studovat odpovídající jednorozměrné operátory. V hojně citované fyzikální literatuře, viz např. [2] a související, se v tomto kontextu lze setkat s vybranými heuristicky odvozenými hraničními podmínkami pro jednorozměrný Diracův operátor, které odpovídají právě ně-

jaké bodové interakci. Matematicky rigorózní studium bodových interakcí a zejména jejich aproximací pomocí regulárních potenciálů tak má přímé uplatnění v oblasti materiálových věd.

*Jako školitel oceňuji, že Lukáš Heriban pracoval svědomitě, organizovaně a zejména s nevídanou mírou samostatnosti a porozumění. Kladně hodnotím i vlastní úspěšné formulace některých důkazů klasických výsledků z přípravné části. Jak již bylo řečeno, hlavní přínos bakalářské práce spočívá v zobecnění výsledku P. Šeba. Cíle a metody matematických důkazů byly od počátku poměrně jasné. Nicméně jejich úspěšná realizace vyžadovala velice dobré porozumění stávajícím výsledkům, přistoupení k řešení ze správného směru (s tím souvisí i dobrá volba notace) a velkou dávku pečlivosti. Rovněž vyzdvihuji, že Lukáš Heriban přišel sám s dalšími relevantními rozšiřujícími podněty pro diplomovou práci. Pokud se mu podaří stanovené cíle naplnit, předpokládám, že výsledky budou publikovatelné v kvalitním časopise v oblasti matematické fyziky či aplikací matematické analýzy. Jednu z částí předpokládaného článku by mohly tvořit výsledky již obdržené v bakalářské práci, což je rozhodně nevídané.*



V Praze dne 10.11. 2020

Ing. Matěj Tušek, Ph.D.

## Reference

- [1] P. Šeba, Klein's paradox and the relativistic point interaction, Lett. Math. Phys. **18** (1989).
- [2] V.M. Pereira, A.H. Castro Neto, Strain engineering of graphene's electronic structure, Phys. Rev. Lett. **103** (2009).

## Modeling time-dependent deformations of concrete members subjected to symmetric and asymmetric drying

Soutěžící: Bc. Pavel Horák (2. ročník mgr. oboru K, FSv, ČVUT v Praze)

Spoluautor: Ing. Petr Havlásek, Ph.D., Katedra mechaniky FSv, ČVUT v Praze

*Posudek práce pro Rektorysovu soutěž 2020*

Práce popisuje výsledky slabě sdruženého hygro-mechanického nelineárního materiálového modelu pro problém symetrického a nesymetrického smrštění betonových vzorků. Hlavním cílem práce bylo zjistit, zda tento přístup umožní jednoznačně identifikovat potřebné parametry modelů z experimentálních dat.

Metoda konečných prvků sloužila pro prostorovou diskretizaci jak v úloze vedení vlhkosti tak i v úloze mechaniky kontinua. Viskoelastické modely se stárnutím pro smrštění a dotvarování byly zkalibrovány dle experimentálních dat od Bryanta [viz odkaz 3 v práci], v úloze vedení vlhkosti se identifikovalo 5 parametrů transportního modelu: základní difusivita  $C_I$ , parametry  $\alpha_0$ ,  $h_c$ ,  $n$ , a součinitel přestupu vlhkosti  $f$ .

Výsledky analýz ukazují různé sady parametrů, které dobře postihují osové smrštění vzorků. Takto formulovaný systém k identifikaci obsahuje nutně málo experimentálních dat. Při doplnění o nesymetricky vysychající vzorky a při porovnání s křivostí vzorku se daří mnohem lépe identifikovat funkci difusivity (parametry  $C_I$ ,  $\alpha_0$ ,  $h_c$ ,  $n$ ), která dobře souhlasí i se symetricky vysychajícími vzorky. Analýzy zároveň ukazují citlivost výsledků na parametrech transportního modelu, resp. tvaru funkce difusivity a jejích oblastech.

Práce je naspána srozumitelným slohem a věnuje se složitějšímu tématu smrštění a dotvarování betonu. Většina publikovaných experimentů v literatuře je nekompletních, chybí základní parametry pro difusivitu, ztrátu hmotnosti, nesymetrické vysychání atd. Uvedená práce se snaží tyto chybějící parametry doplnit pomocí sdružené úlohy, či zjistit jejich citlivost pro klasické modely smrštění a dotvarování (model MPS). Význam práce je v dlouhodobém chování betonů, neboť většina testů je krátkodobých a na malých tělesech, zatímco smrštění a dotvarování betonu probíhá i stovky let na podstatně tlustších konstrukcích. Vzhledem k nelineární difusivitě je třeba k přenosu chování zkalibrovaný sdružený model.

**Hodnocení:** Práce se zabývá komplexním hygro-mechanickým problémem smrštění a dotvarování symetricky a nesymetricky vysychajících těles. Ukazuje možnosti identifikace problému pro 5 parametrů se sadami dat. Závěr práce správně zdůrazňuje nutnost více kalibračních sad pro přesnější identifikaci parametrů. Práci doporučuji zařadit do Rektorysovy soutěže s ohledem na její praktický význam s využitím řešení nelineárních diferenciálních rovnic a numerické mechaniky.

V Praze dne 18.11.2020



Doc. Ing. Vít Šmilauer, Ph.D., DSc.



## Oponentský posudek pro Rektorysovu soutěž

Autor práce: Bc. Martin Jex

Název práce: Testování fázové stability vícesložkových směsí s využitím metod globální optimalizace

Autor se věnuje problému fázové stability vícesložkových směsí. Problém formuluje jako optimalizační úlohu a za pomoci metod globální optimalizace navrhuje řešení. Pokud mohu soudit, práce je originální a postupy korektní. Student se seznámil s fyzikální podstatou problému, optimalizačními technikami, a dále postup implementoval a aplikoval na příkladech, čili jeho úsilí bylo netriviální a přínos odpovídající.

Použité techniky globální optimalizace jsou spíše ty základní, nicméně konstrukce konvexního underestimátoru je velmi pěkná a fyzikální aplikace důležitá. Věřím, že vylepšením určitých částí algoritmu a celkově jejím dotažením by práce měla vědecký přínos hodný i publikování. Níže uvádím několik postřehů jako feedback autorovi, kdyby práci v budoucnu ještě rozšiřoval:

- v (1) není popsáno, co je  $\mathbf{c}$ .
- Striktně vzato, přípustná množina úlohy (1.4) není simplex, protože není uzavřená. Podmínka  $\sum_i b_i c_i < 1$  ostatně může činit potíže i v tom, že globální optimum nemusí existovat. Nebo je zaručeno jiným způsobem?
- str. 9: „dokáže nalézt globální řešení“ Ano, to je pravda, i když bych dodal „... s danou přesností“.
- U funkce  $a_c(\mathbf{c})$  není konvexita zřejmá na první pohled, protože první člen (logaritmus) je konkávní a násobí se, myslím, kladným koeficientem.
- K výrazu (2.2) by se hodilo uvést, co je  $\alpha_i$  a  $\mathbf{c}^{(i)}$ .
- Sekce 2.5: Takto navržené dělení simplexu je základní přístup, ale existují i jiné varianty, které jsou často lepší (zejména, když přípustnou množinou je kvádr).
- Sekce 2.6: Fronta simplexů také nemusí být ideální datová struktura, možná prioritní fronta podle UB resp. LB by byla lepší.
- Příklad v sekci 3.2 i jinde: jaká byla hodnota  $b$ ?

# POSUDEK PRÁCE

## Rozpoznávání ultrazvukových signálů pomocí konvolučních neuronových sítí

(pro Rektorysovu soutěž SVK)

Autor práce: **Martin Kovanda**  
ČVUT, FJFI, Katedra matematiky  
Obor: Matematické inženýrství  
Zaměření: Aplikované matematicko-stochastické metody  
Vedoucí práce: Ing. Milan Chlada, Ph.D.

Práce je tematicky zaměřena na v současnosti velmi progresivní oblast strojového učení, konkrétně konvoluční neuronové sítě, které nacházejí široké uplatnění v mnoha oborech. Představují efektivní nástroj pro analýzu a rozpoznávání objemných souborů dat jako např. digitální obrazy, pro něž byly koncipovány, či zvukové záznamy. Prvky umělé inteligence byly v minulosti úspěšně aplikovány i v oboru nedestruktivního testování materiálů a konstrukcí. Jednalo se ale především o vrstevnaté neuronové sítě, např. pro lokalizaci nebo základní klasifikaci zdrojů praskavé akustické emise. Klíčovým problémem takové úlohy je volba parametrizace naměřených signálů, která nemusí dostatečně postihovat jejich odlišnost. Využití celého signálu jakožto vstupu bylo až do představení konvolučních neuronových sítí z více důvodů nerealizovatelné. Po převedení emisního signálu do časo-frekvenční podoby, tudíž „obrazu“, je již možné takový přístup realizovat. Spolu s možností moderních měřících aparatur ukládat kontinuální záznam ultrazvukových elastických vln v materiálech se otevírá široká škála aplikací ohledně posouzení stavu sledovaných technických objektů. Téma práce je tedy velmi aktuální a přináší stále nové podněty a výzvy jak po teoretické, tak po praktické stránce. Autor se podílel již na samotné formulaci zadání práce. S velkým zaujetím a konstruktivně pak přistupoval k následnému řešení problematiky.

Cílem práce bylo ověřit, zda lze pomocí konvolučních neuronových sítí identifikovat ultrazvukový „projev“ repasované převodovky vrtulníku při různých způsobech zatížení, tzv. letových režimech. Úspěch takové aplikace by předznamenal možnost využití metody pro posouzení stavu opotřebení či poškození podobných převodových ústrojí. Pan Kovanda se velmi rychle zorientoval v teorii strojového učení a pro potřeby implementace zvolil programové prostředí Python s knihovnou Keras-GPU. Vytvořil veškeré kódy pro předzpracování dat, variabilní časo-frekvenční interpretaci signálů a v neposlední řadě vygenerování a samotné učení různých architektur umělých neuronových sítí. Matematicky ověřil vzorec pro výpočet odhadu spektra signálu pro libovolné frekvenční rozlišení a navrhl optimalizaci architektury sítí genetickým algoritmem. Největší přínos práce ale spočívá v rozsahu provedených numerických experimentů, které ukazují úspěšnost identifikace letových režimů převodovky v závislosti na použitém typu neuronové sítě, její architektuře a různých optimalizačních metodách při učení. Nutno poznamenat, že v práci nejsou z důvodu přehlednosti uvedeny výsledky veškerých experimentů, které byly provedeny. Pan Kovanda se rovněž stal v rámci částečného pracovního poměru členem výzkumného týmu v Laboratoři nedestruktivního testování Ústavu termomechaniky a bude zde nadále pokračovat v řešení problematiky strojového učení pro analýzu signálů akustické emise.

Ing. Milan Chlada, Ph.D.



**Posudek oponenta na soutěžní práci**

**studenta MI-MM FJFI ČVUT Jana Kováře**

**"Matematické modelování proudění tekutin a transportu kontrastní látky v cévách"**

Předkládaná práce vznikla v rámci vývoje matematických modelů v biomedicínské oblasti dané spoluprací s Institutem klinické a experimentální medicíny v Praze a INRIA v Paříži. Cílem práce bylo seznámit se se základními trendy v oblasti numerického řešení transportních úloh mřížkovou Boltzmannovou metodou.

První část práce je věnována formulaci základních transportních úloh v dané oblasti popisujících transport ve volném reps. porézním prostředí. Tyto úlohy vznikají formulací odpovídajících zákonů zachování a použitím příslušných konstitutivních vztahů. Autor tyto úlohy přehledně komentuje, zmiňuje význam okrajových podmínek a ukazuje použití rozměrové analýzy.

V práci se autor seznamuje zejména s mřížkovou Boltzmannovou metodou. Pro její pochopení a srovnání používá též metodu sítí (implicitní schéma). Dále představuje varianty mřížkové Boltzmannovy metody a vysvětluje jejich vztah k původní transportní úloze. Algoritmy dané jednotlivými variantami metody jsou přehledně vysvětleny včetně zpracování okrajových podmínek.

Kapitola věnovaná numerickým výpočtům uvádí výsledky získané pro jednodušší transportní úlohy a jejich porovnání s řešením analytickým resp. s řešením metodou sítí. Tato srovnání jsou doprovázena určením experimentálního řádu konvergence. Závěrem jsou řešeny dvourozměrné transportní úlohy v nestlačitelném proudění mající vztah k reálně zkoumané problematice.

Z textu práce je patrné, že autor aktivně využil doporučené literatury a dalších informačních zdrojů a vlastních zkušeností získaných v průběhu studia. Text práce je sestaven přehledně a systematicky, podává dobrý základ pro použití zkoumané metody v dané oblasti. Úlohy výpočetně řešené v poslední kapitole jsou vždy

uvedeny přehlednou tabulkou nastavení. Zde bych možná uvítal i uvedení samotných řešených zákonů zachování. Za přínos považuji důkladné prověření konvergenčního vztahu mřížkové Boltzmannovy metody k analytickému řešení resp. numerickému řešení jinou metodou.

Práce je psána v českém jazyce s použitím správné terminologie a s minimem jazykových nepřesností. Práci považuji za cenný příspěvek ke znalostem dané problematiky a doporučuji ji k účasti v Rektorysově soutěži.



Michal Beneš  
(katedra matematiky)

V Praze dne 13. listopadu 2020

# Posudek soutěžní práce Martina Ladeckého

18. listopadu 2020

Práce - článek Guaranteed Two-Sided Bounds on all Eigenvalues of Preconditioned Diffusion and Elasticity Problems Solved by the Finite Element Method autorů Ladecký, Pultarová a Zeman - je věnována předpodmiňování, speciálně odhadu mezi spektra a i jednotlivých vlastních čísel předpodmíněných matic soustavy lineárních rovnic.

Text má pět částí. První tři seznamují čtenáře s problémem. Hlavní část je čtvrtá, zde jsou uvedeny nové výsledky. Pátá pak obsahuje shrnutí a některé možnosti pro pokračování výzkumu.

První část seznamuje čtenáře s historií a současným stavem. Druhá pečlivě popisuje oba zkoumané typy úloh. Třetí definuje uvažované typy diskretizace a formuluje předpoklady.

Čtvrtá, třídílná, část je stěžejní. První část řeší lokalizaci vlastních čísel pro difuzní operátor, druhá totéž pro případ eliptického operátoru. Třetí část pak srovnává výsledky s článkem jenž tuto práci inspiroval.

Text je napsán čtivě a přináší zajímavé výsledky.

Z hlediska ohodnocení práce jako soutěžní by bylo při prezentaci vhodné vyjasnit podíl soutěžícího na textu.

Petr Mayer

Posudek na příspěvek Michala Malíka pro Rektorysovu soutěž  
Název BP: Matematické modelování fázového rozhraní metodou lattice Boltzmann  
Posudek vypracoval: Ing. Aleš Wodecki

Předložená práce se věnuje metodě fázového pole (phasefield-PF) a počítačovým simulacím s pomocí metody Lattice Boltzmann (LBM). První až čtvrtá kapitola má rešeršní charakter a je psaná srozumitelným jazykem.

Pátá kapitola je věnována numerickým experimentům a obsahuje autorův přínos komunitě. Nejprve autor popisuje detailně výpočet normálového vektoru na základě centrálních diferencí a poté je prezentována použitá metodologie výpočtu chyb, kde autor zavádí experimentální řády konvergence, které pak používá v numerických testech. Samotných numerických experimentů je celkem 5. V nich je demonstrována funkčnost implementace, ale zároveň její nedostatky.

Nedostatky práce jsou minimální, například:

- Strana 13 (3.10) není zmíněna dostatečná motivace pro volbu vztahu. Při odvození tohoto typu navrhuji dobře rozlišovat mezi motivací předpokladů. Je dobré, když je poznat, zda jde o argument heuristického typu, zda to plyne z fyzikální teorie a nebo jde o zjednodušující předpoklad, který nám umožní pracovat s rovnicí lépe.
- Strana 19 (4.10b) Při použití aproximace navrhuji vždy komentovat, jaký má tato aproximace řád, případně komentovat její motivaci.

Nazávěr bych chtěl autora požádat o komentář k numerickým experimentům (kapitola 5), konkrétně:

- Pro první úlohu byly použity 4 regularizace. Komentujte motivaci těchto voleb a divergenci vs. konvergenci druhého řádu v závislosti na nastavení parametru epsilon.

Tato práce představuje přínos pro komunitu zabývající se modelováním s pomocí metody PF, jelikož se zabývá relativně nestandardní aplikací metody LBM na rovnici PF a obsahuje detailní informace o numerických experimentech.

## Posudek soutěžní práce do Rektorysovy soutěže v roce 2020

**Autor:** Ing. Karolína Nedomová

**Název práce:** *Numerická analýza vývoje teploty v betonovém kontejneru úložiště vyhořelého jaderného paliva se zohledněním vlivu hydratačního tepla*

Předložená práce se zabývá problematikou vedení tepla v betonovém kontejneru úložiště vyhořelého jaderného paliva a jeho okolí. S ohledem na technologický postup ukládání jaderného odpadu jsou v práci řešeny dvě na sebe časově navazující úlohy. Nejdříve je vyhořelé jaderné palivo uloženo do betonové zálivky v ocelovém pouzdře. Zdroj tepla v uzavřeném ocelo-betonovém kontejneru tvoří jednak chladnoucí vyhořelé jaderné palivo a také hydratační teplo v čerstvé betonové zálivce. Vedení tepla v kontejneru je popsáno nestacionární rovnicí vedení tepla a integrální podmínkou popisující vývin hydratačního tepla v čerstvém betonu. Soustava je doplněna odpovídajícími okrajovými (Neumann - Newton) a počátečními podmínkami. První úloha je řešena v časovém úseku délky 30 dní. Poté se předpokládá umístění kontejneru do hlubinného úložiště. Teplotní profil a stupeň hydratace betonu po 30 dnech jsou použity jako výchozí počáteční podmínky pro druhou úlohu, kdy je do výpočetní prostorové oblasti zahrnut i okolní horninový masiv. Numerické výsledky druhé úlohy jsou prezentovány v časovém horizontu 100 let.

Silné stránky a přednosti předložené práce:

- velice zajímavé a vysoce aktuální téma;
- těžiště předložené práce tvoří simulace vývoje teploty v kontejneru a jeho okolí po dobu 100 let. S ohledem na *rotační symetrii* úlohy, autorka práce zformulovala danou úlohu v polárních souřadnicích, což má výrazný pozitivní vliv na zjednodušení početní náročnosti úlohy. Numericky je úloha řešena metodou časové diskretizace a metodou konečných prvků (vzhledem k prostorové proměnné). Za významnou přednost považují vytvoření vlastního výpočetního programu v jazyce PYTHON;
- práce je napsána velice pečlivě, poutavě a přehledně.

**Dotaz či připomínka:** Z prezentované práce vyplývá, že vývoj teploty v kontejneru s vyhořelým jaderným palivem a v jeho okolí hraje důležitou roli při navrhování úložiště vyhořelého jaderného paliva. Soustava rovnic řešené počátečně okrajové úlohy ovšem obsahuje vedle neznámé funkce teploty také další neznámou funkci, tzv. stupeň hydratace betonu. Numerické výsledky popisující vývoj stupně hydratace však v práci prezentovány nejsou. Uvažovaná úloha je studována v časovém horizontu 100 let. Jak známo, při zahřívání vyzrálého betonu dochází k dehydratačnímu procesu, který naopak teplo spotřebovává (beton "ochlazuje"). Jak je tento jev zahrnut do prezentovaného modelu?

Předloženou práci doporučuji k ocenění v Rektorysově soutěži.

Michal Beneš

V Rožtokách, dne 14. 11. 2020

# Posudek na práci „Supernáhodné stavy termodynamického dopravního plynu a jejich matematické vlastnosti,“ autora Bc. Víta Pánka

**Motivace pro vznik práce:** Vědecké studie prováděné v rámci zavedené vědní disciplíny VHM (Vehicular Headway Modelling) narazily při vyhodnocování empirických dopravních dat na několik neočekávaných statistických anomálií. Statistické odhadovací metody, jinak velmi účinné při predikci vlastností dopravní mikrostruktury, pro určitý typ dat zásadně selhávají. Aktuální výzkum se proto intenzivně zabývá hledáním příčin takových selhání. Ukazuje se, že problematická data vykazují, na rozdíl od většiny ostatních dat, statistické fluktuace, které podstatně převyšují fluktuace Poissonova systému. A protože Poissonův systém je souborem náhodně generovaných a vzájemně nekorelovaných událostí, míní se všeobecně, že fluktuace tohoto systému jsou maximální, a tudíž nepřekročitelné. Ve skutečnosti ovšem lze (za speciálních podmínek) zkonstruovat i systémy super-poissonovské, tj. systémy s mírou fluktuací intenzivnější než v Poissonově systému. O nich pojednává posuzovaná práce.

**Cíl práce:** Cílem práce bylo matematickými prostředky zavést klasifikaci jednodimenzionálních stochastických systémů bodových částic a s pomocí vhodného simulačního nástroje (termodynamického dopravního plynu) analyzovat, za jakých podmínek se dopravní systém ustaví do super-poissonovského stavu. Tyto superpoissonovské stavy bylo úkolem detekovat v empirických dopravních datech pořízených na evropských dálnicích a diskutovat příčiny jejich vzniku.

**Hodnocení:** Práce dospěla k výsledkům, které jsou publikovatelné ve vysokoimpaktovaném periodiku. Na základě těchto výsledků aktuálně vzniká publikace „Super-random states in vehicular traffic – detection & explanation,“ plánovaná pro publikaci v časopise Physica A, což je u prací tohoto typu extrémně řídký jev. Autor musel kromě analýzy reálných dat a vlastní validované realizace numerického dopravního simulátoru také podrobně prozkoumat matematické vlastnosti málo známé distribuční třídy GIG (Generalized Inverse Gaussian Distribution). Podařilo se mu například odvodit kompaktní rekurentní formulí pro momenty škálované GIG-hustoty. Dalším velice zajímavým výsledkem autora je původní metoda stochastické detekce přitažlivých sil v dopravním proudu. Pomocí ní lze restaurovat implicitní rozhodovací pravidla, podle nichž se řidič pohybuje v saturovaném dopravním proudu. Práce má značný rozsah a podíl autora na publikovaných výsledcích je poměrně velký. Některé výsledky práce vznikly jako zcela samostatná iniciativa autora.

---

**doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.**

Katedra matematiky  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská  
České vysoké učení technické v Praze  
Trojanova 13  
120 00 Praha 2

V Pardubicích dne 15. listopadu 2020.



Ing. Tyburec do Rektorysovy soutěže při Studentské vědecké konferenci předložil skvělou práci [6], která pokračuje v nejlepší tradici „České školy matematické optimalizace konstrukcí“ [např. 1-4, 7]. Předpokládá se, že prvky matice tuhosti jsou polynomiální funkce rozhodovacích proměnných, především tedy spojitých proměnných pro průměry prutů. Formulace problému je velmi obecná a velmi elegantní: Uvažuje zatížení konstrukce na několika místech, stejně tak jako váhu konstrukce jako takové. Snadno by se tedy mohla stát formulací učebnicovou v další generacích učebnic.

Hlavní výsledek (Theorem 4) používá metody momentů při odvození asymptoticky konvergentní posloupnosti relaxací lineárního semidefinitního programování. To vychází jak z tradičních prací funkcionální analýzy (např. Kreina), tak z novějších prací (zejména Jean-Bernarda Lasserra). Použití je komplikováno tím, že se nejedná o polynomiální optimalizační problém, na který by šly výsledky Lasserra aplikovat přímo, ale o nelineární semidefinitní problém (21b), kde aplikace metody momentů vyžaduje jisté úsilí. Výsledné použití lineárního semidefinitního programování je tak značně odlišné od použití v dřívějších pracech [např. 1-4, 7], ačkoli ty také uvažovaly problémy lineárního semidefinitního programování v návrhu konstrukcí. Další teoretické výsledky jsou také elegantní, zejména rekonstrukce přípustných řešení (Proposition 6, Theorem 2) a certifikace optimality (Theorem 3). Stejnou metodou by šlo odvodit zesílení relaxací v dřívějších pracech [např. 1-4, 7], ačkoli toto není explikováno.

Práce je doplněna pěknými numerickými ilustracemi jak v Euler-Bernoulliho (klasické) teorii statické analýzy konstrukcí, kde Euler–Bernoulliho ohýbaný prut má i po deformaci průměr rovinný a kolmý ke střednici prutu, tak v pokročilejších teoriích Timošenska a MITC4 (Mixed Interpolation Tensorial Component). Ty ukazují jak rychlost konvergence posloupnosti relaxací (Section 4.4), tak velikost instancí, kde je možné výsledek uplatnit (Section 4.5).

- [1] W Achtziger, M Kočvara: Structural topology optimization with eigenvalues. *SIAM Journal on Optimization*, 2008.
- [2] A Ben-Tal, M Kočvara, A Nemirovski, J Zowe: Free material design via semidefinite programming: The multiload case with contact conditions. *SIAM review* 42 (4), 2000.
- [3] A Ben-Tal, F Jarre, M Kočvara, A Nemirovski, J Zowe: Optimal design of trusses under a nonconvex global buckling constraint. *Optimization and Engineering* 1 (2), 189-213, 2000.
- [4] F Jarre, M Kocvara, J Zowe: Optimal truss design by interior-point methods. *SIAM Journal on Optimization* 8 (4), 1084-1107, 1998.
- [5] M Tyburec, J Zeman, M Kružík, D Henrion: On optimum design of frame structures. arXiv preprint arXiv:1909.07179, 2019.
- [6] M Tyburec, J Zeman, M Kružík, D Henrion: Global optimality in minimum compliance topology optimization of frames and shells by moment-sum-of-squares hierarchy. arXiv preprint arXiv:2009.12560, 2020.
- [7] J Zowe, M Kočvara, MP Bendsøe: Free material optimization via mathematical programming. *Mathematical programming* 79 (1-3), 445-466, 1997.

Hodnocení soutěžní práce **Pavly Veselé** přihlášené  
do Rektorysovy soutěže 2020

### **Efektivita aritmetických algoritmů v nestandardních číselných soustavách**

Předložená práce se věnuje pozičním numeračním systémům s algebraickou bází určeným k reprezentaci reálných i komplexních čísel. Tento způsob reprezentace umožňuje přesnou aritmetiku v algebraických rozšířeních racionálních čísel.

První polovina textu představuje ucelenou rešerši známých výsledků o numeračních systémech, a to jak z pohledu algebraické teorie čísel a kombinatoriky na slovech, tak i z pohledu topologických vlastností množiny reprezentovatelných čísel. Ačkoliv rešerše čerpá z různorodých zdrojů, které používají rozdílné definice základních pojmů i značení a občas jsou zatíženy i chybami, je rešerše napsaná jednotným jazykem a přehledně tak, že může posloužit i jako učební text pro další studenty.

Druhá polovina soutěžní práce již obsahuje samostatný výzkum Pavly Veselé, která se zaměřila na vyřešení teoretických i algoritmických otázek spojených s preprocessingem on-line algoritmu pro dělení čísel zapsaných v soustavě s komplexní nebo reálnou bází. On-line algoritmy pro dělení zavedli Trivedi a Ercegovic v roce 1977, jejich rozšíření pro libovolnou algebraickou bází jsme publikovali v roce 2019.

V našem článku zůstaly nedořešeny dvě otázky, které jsou obtížné tím, že v nestandardních numeračních systémech může být i číslo nula reprezentované řetězcem z nenulových cifer:

1) Jak pro zvolenou soustavu najít parametr  $D_{min}$ , který garantuje, že v každém kroku algoritmu bude aktuálně uvažována aproximace dělitele dostatečně vzdálená od nuly?

2) Jak upravit řetězec reprezentující dělitele tak, aby byl přípustný na vstupu on-line algoritmu pro dělení?

Odpovědi na zmíněné dvě otázky byly k dispozici pouze pro (v jistém smyslu triviální) soustavy s celočíselnou bází a symetrickou množinou cifer a pro dva další nestandardní systémy.

Pavla navrhla řešení, jak určit  $D_{min}$  pro každou reálnou i komplexní pisotovskou bází a pro jistou podtřídu těchto bází odvodila i maximální možnou hodnotu  $D_{min}$ . Poznamenejme, že čím větší je  $D_{min}$ , tím rychlejší je on-line dělení.

Pro všechny pisotovské báze Pavla popsala metodu pro preprocessing dělitele. Ten je založený na aplikaci konečného počtu přepisovacích pravidel. Nejedná se pouze o teoretický výsledek, Pavla Veselá současně implementovala algoritmus, který přepisovací pravidla nalezne. Tento algoritmus spočívá v systematickém prohledávání prvků tzv. Erdösova spektra báze.

Práce Pavly Veselé představuje doplnění scházejícího kamene k tomu, aby algoritmus pro on-line dělení v algebrických bázích byl plně funkční.

V Praze 6. listopadu 2020

prof. Ing. Edita Pelantová, CSc.

**Posudek práce**  
**„Asymptotické vlastnosti statistické rigidity v částicových systémech**  
**s balanční vlastností,“**  
**autora Bc. Daniela Wohlratha**

**Motivace pro vznik práce:** Vědecká disciplína VHM (Vehicular Headway Modelling), pojednávající o statistickém modelování rozestupů vozidel v dopravním proudu, prošla od doby svého vzniku (za níž se všeobecně pokládá rok 1934, kdy americký profesor Greenshields uskutečnil a vyhodnotil první měření dopravních dat) celou řadou slepých uliček. Od chybných hypotéz a prvotních pokusů o popis dopravní struktury pomocí učebnicových rozdělení dospěl výzkum postupem času k poznatku, že distribuce, jimiž se řídí statistika dopravní struktury, přináležejí do málo probádané distribuční třídy tzv. balancovaných hustot. Tyto hustoty poté plní roli generátorů v teorii balančních částicových systémů, o nichž pojednává předložená práce.

**Cíl práce:** Cílem práce bylo rozvinout aktuální teoretický aparát používaný pro vědeckou oblast VHM. Práce si za svůj praktický cíl vytkla prověřit, zda hypotéza o balančním chvostu koresponduje s trendem empirických dopravních hustot. Teoretickým záměrem práce bylo formalizovat teorii balančních částicových systémů v podobnosti charakteristik druhého řádu, jakými jsou statistická rigidita či kompresibilita. Pro učebnicovou variantu balančního částicového systému (systém s erlangovským generátorem) bylo cílem odvodit obecnou závislost kompresibility na stupni generátoru.

**Hodnocení:** Autor práce zkompletoval dosud neúplnou teorii balančních částicových systémů s nezávislymi a stejně rozdělenými roztečemi a reformátoval ji do kompaktní podoby. Některá známá tvrzení samostatně dokázal jinými (stručněji a přímočařejšími) postupy a dokázal také řadu dalších vlastních tvrzení. Testováním balančních chvostů empirických distribucí regresními metodami prokázal příslušnost těchto distribucí do třídy balancovaných hustot. Podrobně se také zabýval vlastnostmi charakteristik druhého řádu.

Autor postupoval při přípravě práce systematicky, pečlivě a velice samostatně, což se nakonec promítlo do velice kvalitní podoby výsledného textu, v němž je obsaženo i několik původních vzorců, které nebyly před zahájením prezentovaného výzkumu známy. Troufám si tvrdit, že některé části textu této práce mohou dobře posloužit i jako učební text pro vybrané partie statistiky částicových systémů.

---

**doc. Mgr. Milan Krbálek, Ph.D.**

Katedra matematiky  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská  
České vysoké učení technické v Praze  
Trojanova 13  
120 00 Praha 2

# Dominika Zogatová

## Úvod do teorie kooperativních her: teoretická a experimentální studie

(Posudek vedoucího bakalářské práce)

### Hodnocení

Předložená bakalářská práce sestává ze dvou částí. První, teoretickou, část, Dominika otvírá definicí kooperativní hry s přenosnou výhrou a uvádí několik jejich standardních řešení. U jednotlivých řešení dále ukazuje, na jakých axiomech jsou postaveny, v případě Shapleyho hodnoty předkládá hned několik možných axiomatizací. Při prezentaci Shapleyho axiomatizace Dominika prezentuje jak původní, historický Shapleyho důkaz, tak pozdější, elegantnější důkaz založený na Harsanyiho dividendách. Celá tato část má velmi solidní formální úroveň a Dominika zde prokazuje, že je schopna reprodukovat matematické důkazy korektně a s pochopením. Práce je cenná v tom, že je (dle mého názoru) prvním ucelenějším přehledem teorie kooperativních her v českém jazyce. V tomto smyslu se musela Dominika vypořádat i se zavedením původní české terminologie. I tento úkol zvládla, dle mého názoru, na velmi solidní úrovni.

Druhá část práce pak vychází z experimentu, který byl proveden na Radboud Universiteit v Nijmegenu. Jedná se o původní data, která nebyla doposud vytěžena. Úkolem Dominiky zde bylo předvést základní statistické parametry chování jedinců v daném experimentu a porovnat je s různými teoretickými koncepty, které byly uvedeny v první části. Otázka, kterou si tento experiment pokládá je poměrně přímočará - jak rozdělují lidé výdělek, mají-li pouze částečné informace. Co je v takovém případě „spravedlivé“? Jak vnímají spravedlnost „soudci“, tedy ti, kdo výdělek reálně rozdělují a jak je naopak spravedlnost chápána hráči, tedy těmi, kdo se v dané situaci přímo nachází a jejichž zisk je „rozdělován“? Z matematického hlediska se tedy jedná o porovnávání různých „typů“ účastníků experimentu pomocí neparametrických testů. V této části prokazuje Dominika velmi solidní znalost statistických metod i schopnost tyto metody správně aplikovat.

První výsledky analýzy dat nejsou překvapivé. Data naznačují, že neexistuje jediný standard distributivní spravedlnosti - naopak vidíme, že chování soudců i hráčů nesplňuje předpoklady normálního rozdělení. Populace experimentálních subjektů je tak nejspíše konglomerátem, v němž mají různí lidé různé představy o tom, co je „spravedlivé“. V takové situaci je tedy přirozené, že se Dominika snažila rozlišit jednotlivé „typy“ subjektů a nějak blíže je charakterizovat.

Tato část práce je úspěšná jen z části. Ukazuje se, že hráči volí více rovnostářské (egalitářské) rozdělení než soudci, podobně ženy jsou více egalitářské než muži. Obě tato pozorování jsou v souladu s dosavadní literaturou, zejména fakt, že ženy mají větší odpor k nerovnostem než muži, je popsán v mnoha experimentech (v této části by práci obohatilo rozsáhlejší uvedení jejich výsledků do kontextu literatury posledních let). Výše uvedené rozdíly ale nejsou statisticky signifikantní. v tomto smyslu je tedy třeba uvažovat o novém experimentu, který by daná pozorování potvrdil či vyvrátil.

Další otevřenou otázkou je teorie, že v datech vidíme heterogenní populaci složenou z různých „typů“. Něco takového bychom mohli tvrdit jen v případě, že bychom byli schopni najít nějakou konzistenci v chování hráčů mezi různými typy úloh. Z tohoto důvodu zavádí Dominika jistou charakteristiku jednotlivého hráče (popisuje ho parametrem  $\alpha$ ). Bohužel se zdá, že tento parametr necharakterizuje hráče ve smyslu, že by pomohl předpovědět jeho chování mimo zkoumaný vzorek. Otázka, zdali existuje jiný parametr, který by lépe charakterizoval hráče, je otevřená. Nemůžeme vyloučit, že soudci nemají zřetelné, individuální preference ve smyslu toho, co je „spravedlivé“. Je možné, že soudce má jistou distribuci norem spravedlnosti, a z této distribuce vybírá náhodně jednu, kterou v dané experimentální otázce referuje. I v tomto kontextu je třeba uvažovat o novém experimentu, který by dokázal hypotézu „fixních“ individuálních preferencí pro spravedlnost potvrdit či vyvrátit.

## Závěr

Ve své bakalářské práci Dominika Zogatová prokazuje, že si za tři roky studia FJFI osvojila základy matematického modelování. Je schopna reprodukovat standardní modely tak, jak jsou formulovány v literatuře posledních let a tyto modely aplikovat na reálnou situaci a testovat plausibilitu daných modelů. Z experimentálních dat vytěžila několik zásadních poznatků. Dále, a to považuji za ještě důležitější, analýzou dat dospěla k dalším, výjimečně zajímavým otázkám. Bylo by velmi potěšující, kdyby se Dominice podařilo uskutečnit experiment, který by vnesl světlo do těchto otázek. Považoval bych za velmi smysluplné, aby se danou problematikou zabývala i nadále, a to i s výhledem k diplomové práci. Tematika, kterou Dominika ve své práci studuje, má solidní potenciál pro uveřejnění v kvalitním mezinárodním časopise na poli matematické teorie her či aplikovaného operačního výzkumu. Její dosavadní práci, kterou shrnuje předložená bakalářská práce pak hodnotím jako „výbornou“, tedy písmenem A.

Ing. René Levínský, Ph.D.  
Národohospodářský ústav Av ČR  
Politických vězňů 7  
111 21 Praha 1



|                     |  |
|---------------------|--|
| Editor              | Stanislav Olivík   |
| Název díla          | Sborník abstraktů Studentské konference<br>a Rektorysovy soutěže               |
| Vydalo              | České vysoké učení technické v Praze   |
| Zpracovala          | Fakulta stavební   |
| Kontaktní<br>adresa | Katedra matematiky,<br>Fakulta stavební, ČVUT v Praze,<br>Thákurova 7, Praha 6 |
| Tel.                | +420 22435 4390  |
| Počet stran         | 52   |
| Vydání              | 1.   |

Neprodejné.

Praha 2020