



Katedra matematiky  
Fakulta stavební ČVUT v Praze

# **SBORNÍK**

## **abstraktů**

Studentské konference  
a  
**Rektorysovy soutěže**

5. listopadu 2021  
Praha

Vydavatel: Katedra matematiky, FSv ČVUT v Praze  
Praha 2021

Editor: Stanislav Olivík

Podpořeno grantem SGS ČVUT, SVK 01/21/F1

# Předmluva

Katedra matematiky Fakulty stavební ČVUT opět pořádá Studentskou vědeckou konferenci, v jejímž rámci se koná Rektorysova soutěž. Připomeňme si, že v roce 2007 se konal 0. ročník, letos se koná již 14. ročník. Soutěž byla v minulých letech organizována buď našimi kolegy z FJFI ČVUT, nebo naší katedrou.

Letošní ročník se stejně jako v loňském roce koná jako videokonference online.

Prezentované práce jsou z různých oblastí aplikované matematiky. Mnoho z nich souvisí s bakalářskými, diplomovými nebo disertačními pracemi účastníků konference.

Organizátoři konference by zde rádi poděkovali především účastníkům konference a Rektorysovy soutěže, dále vedoucím studentských prací, recenzentům a členům odborné hodnotící poroty za jejich práci, která přispěla k vysoké úrovni a prestiži konference. Dále je potřeba zdůraznit významný přínos webmastera Studentské konference a Rektorysovy soutěže Stanislava Olivíka, bez jehož činnosti by se tato akce vůbec nemohla v této formě uskutečnit.

Organizace konference je financována z grantu SVK 01/21/F1 uděleného naší katedře grantovou komisí Studentské grantové soutěže ČVUT. Tímto bychom chtěli poděkovat grantové komisi za udělení grantu.

Informace o Studentské vědecké konferenci a Rektorysově soutěži lze nalézt na webových stránkách <https://mat.fsv.cvut.cz/rektorys/soutez/>.

V Praze dne 5. 11. 2021

František Bubeník  
Martin Soukenka



## Karel Rektorys

Prof. RNDr. Karel Rektorys, DrSc. (1923-2004) působil na ČVUT od roku 1954 do roku 2004, tedy celých 50 let. Stal se významnou osobností mezi vědci. Proslavil se zejména metodou časové diskretizace při řešení parciálních diferenciálních rovnic. Profesor Rektorys měl obrovskou autoritu i jako pedagog. Jeho přednášky se staly fenoménem. Jako vystudovaný matematik dokázal překlenout hranice matematiky a inženýrských oborů. Podílel se například na projektu stavby Orlické přehrady. Byl autorem řady publikací, *Variační metody v inženýrských problémech* a v problémech matematické fyziky, *Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice*, *Co je a k čemu je vyšší matematika*, a byl vedoucím kolektivu autorů světoznámého *Přehledu užití matematiky*.





# Obsah

## Soutěžní příspěvky

Liya Gaynutdinova	9
<i>Micromechanical Parameter Identification Using Bayes Method</i>	
Martin Ladecký	10
<i>Well-conditioned FFT-accelerated Finite Element Solver for Periodic Homogenisation</i>	
Jakub Liška	11
<i>Principiální omezení magnetické levitace a magnetického zadržování</i>	
Daniela Opočenská	14
<i>Kritický exponent balancovaných slov</i>	
Katarína Studeničová	16
<i>Popis interakcií v komplexných systémech pomocou maximálne entropických funkcionálov</i>	

## Posudky na soutěžní příspěvky

Liya Gaynutdinova	21
Martin Ladecký	22
Jakub Liška	24
Daniela Opočenská	25
Katarína Studeničová	26

## Nesoutěžní příspěvky

Judita Runcziková	31
<i>Modelování transportních procesů v porézním prostředí</i>	





## **Soutěžní příspěvky**



# Micromechanical Parameter Identification Using Bayes Method

Liya Gaynutdinova\*, Ondřej Rokoš, Jan Zeman, Ivana Pultarová, Jan Havelka

\* Katedra matematiky FSv ČVUT, liya.gaynutdinova@fsv.cvut.cz

**Abstract.** Micromechanical parameters are required for constitutive laws that help to predict complex physical processes in materials, such as strain localisation, plasticity, delamination, and cracks. The considered problem is identification of micromechanical parameters in a fibre-reinforced plane strain composite, where Digital Image Correlation (DIC) method is used as a full-field measurement technique. The existing deterministic approach to parameter identification in the form of Integrated DIC (IDIC) was shown to be overly sensitive to boundary data errors. In this work, the stochastic approach is proposed, which employs a Markov Chain Monte Carlo sampling method, i.e. the Metropolis-Hastings algorithm (MHA). The identified parameters fall into two distinct groups: material and boundary conditions parameters. First, the MHA that only identifies the material parameters with fixed boundary conditions is considered, and its sensitivity with respect to random and systematic errors in the boundary conditions is quantified and compared to the IDIC. MHA's parameter field is then expanded with two different ways of approximating the boundary conditions, and the method is compared to the Boundary Enriched IDIC. All methods are tested with a virtual experiment that employs a Neo-Hookean hyperelastic micromechanical model, discretised with the Finite Element Method. Benefits and pitfalls of all studied algorithms are discussed.

## Reference

- [1] Rokoš, O.; Hoefnagels, J.P.M.; Peerlings, R.H.J.; Geers, M.G.D.; *On micromechanical parameter identification with integrated DIC and the role of accuracy in kinematic boundary conditions*. International Journal of Solids and Structures 146 p. 241–259, 2018.
- [2] Ruybalid, A.P.; Hoefnagels, J.P.M., van der Sluis; O., Geers, M.G.D.; *Image-based interface characterization with a restricted microscopic field of view*. Int. J. Solids Struct. 132–133, 218–231, 2017.
- [3] Blaheta, R; Béréš, M.; Domesová, S. ; Pan, P.; *A Comparison of Deterministic and Bayesian Inverse with Application in Micromechanics*. Applications of Mathematics, 63 (6), pp. 665–686, 2018.

# Well-conditioned FFT-accelerated Finite Element Solver for Periodic Homogenisation

Martin Ladecký<sup>1,2</sup>, Richard J. Leute<sup>3</sup>, Ali Falsafi<sup>4</sup>, Till Junge<sup>4</sup>,  
Ivana Pultarová<sup>1</sup>, Lars Pastewka<sup>3</sup>, Jan Zeman<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Faculty of Civil Engineering, CTU in Prague  
martin.ladecky@fsv.cvut.cz

<sup>2</sup> Department of Mechanics, Faculty of Civil Engineering, CTU in Prague

<sup>3</sup> Department of Microsystems Engineering, University of Freiburg

<sup>4</sup> Department of Mechanical Engineering, École Polytechnique Fédérale de Lausanne

**Abstract.** The study contributes to the area of computational nonlinear homogenisation of periodic media. Well-conditioned schemes based on Fourier spectral basis accelerated by the fast Fourier transform have outperformed the finite element solvers in the sense of convergence, memory footprint, and computation overhead in recent decades. One of the last unresolved issues were spurious oscillations and checkerboard patterns in the gradient fields.

The proposed approach relies on the finite element discretisation of the mechanical equilibrium conditions to avoid spurious oscillations in the stress/strain fields. The superior convergence properties are enforced by the well-suited preconditioner, whose impact on the linear system spectral characteristics was recently theoretically justified. The robustness and efficiency of our method are theoretically proved and demonstrated by a series of experiments performed in the open-source homogenisation software package  $\mu$ Spectre.

**Acknowledgement.** ML, IP, and JZ acknowledge the support by the Center of Advanced Applied Sciences, the European Regional Development Fund (project No. CZ 02.1.01/0.0/0.0/16 019/0000778). ML additionally acknowledges support by the Czech Science Foundation (project No. 20-14736S) and the Student Grant Competition of the Czech Technical University in Prague (project No. SGS21/003/OHK1/1T/1).

## References:

- [1] *H. Moulinec, P. Suquet*, : A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **157** (1998), 69–94 MR3961990
- [2] *J. Zeman, J. Vondřejc, J. Novák, I. Marek*, : Accelerating a FFT-based solver for numerical homogenization of periodic media by conjugate gradients. *Journal of Computational Physics* **229** (2010), 8065–8071

# Principiální omezení magnetické levitace a magnetického zadržování

Jakub Liška\*, Lukáš Jelínek, Miloslav Čapek

\* Katedra elektromagnetického pole, FEL, ČVUT v Praze, jakub.liska@fel.cvut.cz

**Abstrakt.** Práce se zabývá principiálními omezeními v elektromagnetismu, mezními hodnotami veličin, které nelze žádnou fyzikální realizací překonat. V rámci práce je metodologie aplikována na problematiku magnetické levitace a magnetického zadržování elektricky neutrálních částic.

V práci je kvantifikace elektromagnetického pole v oblasti Fourierových frekvenčních spekter založena na konečném rozvoji proudové hustoty do lineárních bázových funkcí definovaných na trojúhelníkové mříži a následné aplikaci Galerkinovy metody. Těmito nástroji byl implementován výpočet magnetického pole a jeho prvních a druhých prostorových derivací, které slouží k hodnocení kvality magnetických levitátorů i magnetických pastí a to z lokálního pohledu pomocí Taylorova polynomu funkce tří proměnných (prostorových souřadnic).

Hodnocené ukazatele kvality (konstantní člen, gradient a vlastní čísla Hessovy matice) bylo možné vyjádřit kvadratické formy expanzí koeficientů proudové hustoty, tedy vektorů o velikosti počtu použitých bázových funkcí. Hledání principiálních omezení bylo tedy založeno na kvadratickém programování s kvadratickými omezeními,

$$(1) \quad \min_{\mathbf{I}} \quad \mathbf{I}^H \mathbf{A} \mathbf{I} + \operatorname{Re}[\mathbf{I}^H \mathbf{a}] + \alpha$$
$$(2) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{I}^H \mathbf{C}_i \mathbf{I} + \operatorname{Re}[\mathbf{I}^H \mathbf{c}_i] + \gamma_i = 0; \quad \forall i = 1, \dots, m$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{I}, \mathbf{a}, \mathbf{c}_i &\in \mathbb{C}^{n \times 1}, \\ \mathbf{A}, \mathbf{C}_i &\in \mathbb{C}^{n \times n}, \\ \alpha, \gamma_i &\in \mathbb{R}, \\ \mathbf{C}_1 &\succ 0, \end{aligned}$$

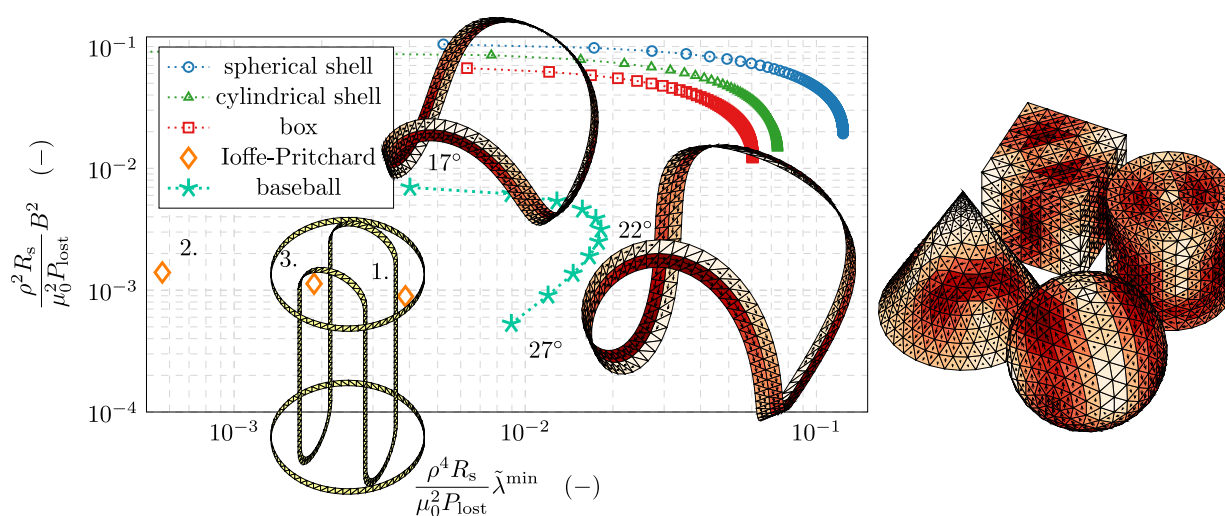
a kde všechny matice jsou hermitovské. Řešení optimalizačního problému je založeno na duální formulaci. Jedná se o konvexní optimalizační problém, který vede na zobecněný problém vlastních čísel. Obecné řešení popsaného optimalizačního problému bylo implementováno ve formě balíčku<sup>1</sup> „Fundamental Bounds” k nástroji pro analýzu a syntézu

---

<sup>1</sup>Vývoj nástroje započal s bakalářskou prací na téma „Optimální činitel jakosti vzduchových induktorů”, kde byly ukázána principiální omezení vzduchových induktorů. Současná verze byla dokončena v rámci diplomové práce „Principiální omezení magnetické levitace a magnetického zadržování” a je dále rozvíjena. Nástroj dále slouží ke stanovení principiálních limitů anténních kvantit, a to i ve formě Pareto-optimálních množin. V rámci zahraniční spolupráce je nástroj aplikován a rozvíjen v oblasti implantovaných antén. Nástroj je možné využít i na stanovení principiálních omezení v jiných fyzikálních oblastech, pokud jsou kvalitativní parametry vyjádřitelné jako kvadratické formy.

elektromagnetických struktur „Antenna Toolbox for Matlab”. Balíček je volně dostupný na internetových stránkách<sup>2</sup>.

Výsledkem práce jsou principiální omezení systémů pro magnetickou levitaci a magnetické uvěznění neutrálních částic, které využívají povrchové struktury. Jako nepřekročitelné etalony kvality, je lze s výhodou použít při návrhu magnetických levitátorů a magnetických pastí, kdy porovnáním výkonosti realizace a principiálního omezení zjistíme, zda další zlepšování parametrů je možné nebo ekonomicky výhodné. Ukázka takového porovnání je na obrázku 1 pro případ magnetických pastí. Přestože jsou uvedené magnetické pasti hojně využívány, jejich porovnání s principiálními omezeními naznačuje, že v současnosti používané realizace mají velký prostor pro zlepšení.



Obrázek 1: (vlevo) Porovnání magnetických pastí pro neutrální částice typu Ioffe-Pritchard a baseball s principiálními omezeními na kouli, válci a krychli. Porovnávanými veličinami jsou kvadrát velikosti polarizačního magnetického pole a minimální vlastní číslo Hessianovy matice potenciální energie. Obě hodnoty jsou požadovány co nejvyšší. Veličiny jsou vhodně znormalizovány tak, aby byla odstraněna závislost na použitém materiálu a velikosti. (vpravo) Optimální proudové hustoty na povrchu koule, krychle, kužele a válce, které tvoří sférické potenciálové jámy pro magnetické zadržování uvnitř těchto objektů.

**Poděkování.** Práce byla podpořena Grantovou agenturou České republiky pod projektem číslo 19-06049S a dále Grantovou agenturou ČVUT v Praze pod projektem číslo SGS19/168/OHK3/3T/13.

<sup>2</sup><http://antennatoolbox.com/fundamentalBounds>

## Literatura:

- [1] R. F. Harrington, *Field Computation By Moment Method*. Wiley-IEEE Press, 01 1993.
- [2] S. M. Rao, D. R. Wilton, and A. W. Glisson, “Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 30, pp. 409 – 418, 06 1982.
- [3] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*. Springer, 01 2006.
- [4] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge, Great Britain: Cambridge University Press, 2004.
- [5] W. C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*. Chapman and Hall/CRC, 2 ed., 2014.
- [6] J. Liska, L. Jelinek, and M. Capek, “Fundamental bounds to time-harmonic quadratic metrics in electromagnetism: Overview and implementation,”
- [7] A. F. Peterson, S. L. Ray, and R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*. Wiley – IEEE Press, 1998.
- [8] T. Bergeman, G. Erez, and H. J. Metcalf, “Magnetostatic trapping fields for neutral atoms,” *Physical Review A*, vol. 35, pp. 1535–1546, feb 1987.
- [9] J. Pérez-Ríos and A. S. Sanz, “How does a magnetic trap work?,” *American Journal of Physics*, vol. 81, pp. 836–843, nov 2013.

# Kritický exponent balancovaných slov

Daniela Opočenská\*

\*Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská ČVUT, opocedan@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** Kombinatorika na slovech je relativně novým odvětvím matematiky zabývajícím se studiem slov a formálních jazyků. Jedním z aktuálních témat kombinatoriky na slovech je právě kritický exponent a jeho minimalita pro dané skupiny nekonečných slov. Kritický exponent odráží jistou periodičnost nekonečných slov, je to největší možná hodnota, kolikrát se faktor hned za sebou ve slově opakuje. Například pro periodická slova je kritický exponent roven  $+\infty$ , pro aperiodická již dosahuje i konečných hodnot.

Sturmova slova, což jsou aperiodická slova s nejmenší faktorovou komplexitou, jsou dobře prozkoumaná a známý je i jejich kritický exponent. My se v práci zaměříme na kritický exponent aperiodických balancovaných slov. Ta nad binární abecedou splývají s těmi sturmovskými a nad většími abecedami je lze vyrobit ze slov sturmovských „barvením“ dvěma disjunktními slovy s konstantními mezerami (tzn. písmena a, resp. b ze sturmovského slova se postupně nahrazují písmeny z jednoho, resp. druhého slova s konstantními mezerami).

V práci vysvětlujeme, jak se počítá kritický exponent a také asymptotický kritický exponent, který odráží opakování faktorů v limitě pro délku faktoru jdoucí do nekonečna. Na rozdíl od matematiků, kteří řešili problém před námi „hrubou silou“ prohledáváním dlouhých prefixů balancovaných slov, my umíme kritický exponent vyšetřit zkoumáním bispeciálů a jejich návratových slov, jejichž charakteristiky dobře známe.

Vlastním přínosem práce je implementace algoritmů pro výpočet kritického a asymptotického kritického exponentu balancovaných slov. Tyto programy jsou dále hojně využívány při zkoumání minimálního kritického exponentu. Právě pomocí programů se nám podařilo vyvrátit hypotézu od autorů N. Rampersada, J. Shallita a É. Vandomme, která říkala, že minimální kritický exponent balancovaných slov nad abecedou o  $d \geq 5$  písmenech je  $\frac{d-2}{d-3}$ . S pomocí programu jsme totiž dokázali, že minimální kritický exponent nad 11-, resp. 12-písmennou abecedou je  $\frac{10}{9}$ , resp.  $\frac{11}{10}$ , tedy  $\frac{d-1}{d-2} < \frac{d-2}{d-3}$ .

Pomocí programů také dále zkoumáme minimální asymptotický kritický exponent balancovaných slov, o kterém není moc známo. Do budoucna bychom chtěli vyslovit a dokázat podobnou domněnku i pro asymptotický kritický exponent balancovaných slov.

**Poděkování.** Chtěla bych poděkovat doc. Ing. Lubomíře Dvořákové, Ph.D., za ochotu, vedení, skvělé rady a připomínky a trpělivost při tvorbě této práce.

## Literatura:

- [1] A. R. Baranwal, *Decision algorithms for Ostrowski-automatic sequences*, master thesis, University of Waterloo, <http://hdl.handle.net/10012/15845> (2020).



- [2] A. R. Baranwal, J. Shallit, *Critical exponent of infinite balanced words via the Pell number system*, Proceedings WORDS 2019, LNCS, 11682, Springer (2019), 80–92.
- [3] F. Dolce, L. Dvořáková, E. Pelantová, *On balanced sequences and their critical exponent*, arXiv: 2108.07503, 2021, submitted to Theoret. Comput. Sci.
- [4] F. Dolce, L. Dvořáková, E. Pelantová, *On balanced sequences and their asymptotic critical exponent*, Proceedings LATA 2021, LNCS vol. 12638, 293–304 (2021).
- [5] F. Dolce, L. Dvořáková, E. Pelantová, *Computation of critical exponent in balanced sequences*, In: Lecroq T., Puzynina S. (eds) Combinatorics on Words. WORDS 2021. Lecture Notes in Computer Science, vol 12847. Springer, Cham.
- [6] L. Dvořáková, K. Medková, E. Pelantová, *Complementary symmetric Rote sequences: the critical exponent and the recurrence function*, Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. 20 (1) (2020) #20
- [7] G. A. Hedlund, M. Morse, *Symbolic dynamics II - Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. 62 (1940), 1-42
- [8] P. Hubert, *Suites équilibrées*, Theoret. Comput. Sci. 242 (2000), 91-108.
- [9] J. Justin, G. Pirillo, *Episturmian words and episturmian morphisms*, Theoret. Comput. Sci. 276 (2002), 281-313.
- [10] M. Lothaire, *Algebraic combinatorics on Words, Encyclopaedia of mathematics and its applications*, Cambridge University Press (2002), doi:10.1017/CBO9781107326019.
- [11] N. Rampersad, J. Shallit, É. Vandomme, *Critical exponents of infinite balanced words*, Theoret. Comput. Sci. 777 (2019), 454–463.
- [12] L. Vuillon, *A characterization of Sturmian words by return words*, Eur. J. Combin. 22 (2001), 263-275.
- [13] Qt: <https://www.qt.io/>
- [14] D. Opočenská, *Programy pro výpočet (asymptotického) kritického exponentu balancovaných slov*, dostupné na [https://github.com/Opocedan/Kriticky\\_exponent\\_balancovanych\\_slov](https://github.com/Opocedan/Kriticky_exponent_balancovanych_slov).

# Popis interakcií v komplexných systémoch pomocou maximálne entropických funkcionálov

Katarína Studeničová\*

\*Katedra matematiky FJFI ČVUT, studekat@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** Súťažný príspevok vznikol na základe vybraných kapitol z bakalárskej práce [1]. V texte sa venujeme budovaniu matematického aparátu vhodného na popis komplexných systémov, napríklad ľudského mozgu, ktorý bol navrhnutý v článkoch [2, 3, 4]. Objekty v článkoch neboli rigorózne definované, preto najprv formalizujeme definície troch typov maximálnej entropie a spojenej informácie, následne skúmame niektoré ich základné vlastnosti, napríklad monotóniu, ohraničenosť, podmienky nezávislosti zložiek náhodnej veličiny popisujúcej systém a vzťahy medzi konštrukciami. Pri popise reprezentujeme systém vektorovou náhodnou veličinou, čo nám umožňuje skúmať aj vlastnosti, ktoré nevieme popísať pomocou grafov, ktoré sú pri popise komplexných systémov obvykle používané. Tento prístup umožňuje skúmať interakcie nielen medzi dvojicami, ale aj väčšími skupinami elementov systému, práve na tieto interakcie sa v texte zameriavame. Hlavným prínosom našej práce je prieskum súvislosti existencie interakcií vyšších rádov v systéme a vlastností maximálne entropických funkcionálov matematicky exaktným spôsobom. V článkoch [3, 4] autori síce navrhli možnú interpretáciu funkcionálov, ale nepodložili ju vyslovením a dokázaním príslušných viet. V rámci bakalárskej práce sme dokázali, že takáto interpretácia je správna len pokiaľ systém spĺňa dodatočné predpoklady. Vyslovujeme preto dve vety, v ktorých popisujeme jednu z možných situácií, pri ktorej sú takéto predpoklady splnené, tiež dve vety popisujúce systém, ktorý tieto dodatočné požiadavky nespĺňa a venujeme sa možnej interpretácii novodefinovaných funkcionálov aj pre tento prípad.

## Literatúra:

- [1] K. Studeničová, *Vlastnosti variant spojene informace*. FJFI ČVUT, bakalárska práca, 2021.
- [2] E. Schneidman, S. Still, M. J. Berry, and W. Bialek, “Network information and connected correlations,” *Physical review letters*, vol. 91, p. 238701, 2003.
- [3] E. A. Martin, J. Hlinka, and J. Davidsen, “Pairwise network information and nonlinear correlations,” *Physical Review E*, vol. 94, p. 040301, 2016.
- [4] E. A. Martin, J. Hlinka, A. Meinke, F. Děchtěrenko, J. Tintěra, I. Oliver, and J. Davidsen, “Network inference and maximum entropy estimation on information diagrams,” *Scientific Reports*, vol. 7, p. 7062, 2017.
- [5] J. Jacod and P. Protter, *Probability Essentials*. Springer, 2012.

- [6] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*. Wiley-Interscience, 2006.
- [7] T. Van de Cruys, “Two multivariate generalizations of pointwise mutual information,” in *Proceedings of the Workshop on Distributional Semantics and Compositionality*, p. 16, Association for Computational Linguistics, 2011.



## **Posudky na soutěžní příspěvky**



Rektorysova soutěž, ročník 2021  
**Posudek**

Téma práce:

**Micromechanical Parameter Identification Using Bayes Method**

Autorka práce:

**Ing. Liya Gaynutdinova**

Práce je psána formou vědeckého článku a navazuje na úspěšně obhájenou diplomovou práci autorky. Jedná se o stále pokračující výzkum.

Záběr práce je velice široký, autorka postupně studuje

- deterministický přístup k inverzní úloze pomocí metody DIC a jejich modifikací,
- Bayesovský přístup k úloze včetně numerického výpočtu metodou MHA,
- srovnání stability obou metod při uvažování šumu v datech na hranici úlohy,
- návrh řešení se zašumenými daty pomocí nových stupňů volnosti na hranici a rozsáhlé numerické experimenty zkoumající vliv počtu nových proměnných a velikosti šumu,
- alternativní přístup k volbě nových parametrů na hranici pomocí KLE a numerické srovnání s „naivním“ přístupem,
- aplikace Bayesovského přístupu na zobecněnou inverzní úlohu bez zafixování jednoho parametru (špatně podmíněná inverzní úloha).

Za ocenění stojí již samotná orientace v multidisciplinárním prostředí, které zahrnuje pochopení úlohy z praxe, standardní deterministický postup řešení, i nový stochastický přístup pomocí Bayesovské inverze. Přínosů práce je více: aplikace Bayesovské inverze v této problematice, vyřešení problému s šumem na hranici pomocí přidání nových proměnných, a zefektivnění navrženého přístupu pomocí KLE.

Je patrné, že výzkum vyžadoval velké množství práce - teoretické i implementační. Po formální a jazykové stránce je práce kvalitní. Slabším místem práce je přílišná stručnost. V teoretickém popisu použitých metod je míra stručnosti adekvátní vzhledem k vhodně zvoleným referencím. Problém může nastat v popisu numerických experimentů, kde na některých místech není zcela jasný význam některých parametrů. Chybí například podrobnější informace o apriorních a návrhových hustotách v řešených úlohách. Místy se vyskytují nepřesnosti ve značení a ve vzorcích.

Celkově práci hodnotíme velmi kladně a věříme, že po dokončení vznikne kvalitní vědecký článek.

V Ostravě dne 3. listopadu 2021

Ing. Michal Béreš  
Ústav geoniky AV ČR

Ing. Simona Bérešová  
Ústav geoniky AV ČR

## Posudek soutěžní práce Rektorysovy soutěže 2021

Název práce:

*Well-conditioned FFT-accelerated Finite Element Solver for Periodic Homogenisation*

Autor:

*Martin Ladecký*

### *Popis práce:*

Práce se věnuje numerické homogenizaci, tedy procesu výpočtu efektivních hodnot materiálových parametrů. Hlavním cílem je představit novou metodu předpodmínění, která sníží výpočetní náročnost a současně nevede ke vzniku oscilačních artefaktů, jako u ostatních analogických postupů. Jde o nový teoretický výsledek, který v oblasti homogenizace dosud nebyl použit, i když velmi podobné přístupy se objevily. Výhodou tohoto nového postupu je nejen teoreticky garantovaná vyšší kvalita řešení soustavy lineárních rovnic, ale i malá náročnost praktického výpočtu, která se potvrzuje v uvedených příkladech.

V prvních dvou částech je popsána úloha homogenizace v úlohách nelineární elasticity a stručně jsou diskutovány hlavní historické i současné metody řešení. Třetí část je věnována podrobnému popisu diskretizace. Uvažuje se oblast tvaru obdélníka nebo kvádrů s daty po částech konstantními na každém pixelu resp. voxelu oblasti. K diskretizaci je použita slabá formulace a variační princip, metoda konečných prvků. Pozornost je věnována speciální geometrii oblasti a diskretizace, která je jednou z podmínek úspěšnosti nového algoritmu. Ve čtvrté části je představena hlavní část nové metody, a sice nový způsob předpodmínění. Předpodmiňovacím operátorem je diskretizovaný Greenův operátor pro úlohu s konstantními daty. Efektivní realizace je postavena na rychlé diskrétní Fourierově transformaci. Důmyslným použitím již dříve publikovaných výsledků jiných autorů i autora práce samotného a jeho spolupracovníků lze snadno získat garantované dvoustranné odhady spektra předpodmíněného systému. Označení objektů diskretizace a Gaussovy integrace z třetí části je využito v páté části, kde je podrobně popsán celkový algoritmus. V šesté části jsou uvedeny experimenty prokazující absenci umělých oscilací a výpočetní náročnost srovnatelnou s metodami založenými na Fourierově diskretizaci. V sedmé části jsou jednotlivé části nové metody podrobně porovnány s běžně používanými postupy uváděnými v klasických i nejnovějších publikacích.

### *Hodnocení:*

Práce přináší bezesporu kvalitní výzkumný výsledek. Urychlení výpočetních postupů je významné a je podloženo teoretickými výsledky. Oceňuji stručný a precizní popis celého algoritmu (i přes některé drobné nedostatky). Odhaduji, že pro čtenáře bude přínosný. Formální a zejména jazykové a gramatické stránce práce však musí být ještě věnována pozornost. Dále jsem našla tyto nesrovnalosti:

- Poněkud volně je používáno spojení FFT-based. Není jasné, co se tím myslí. FFT je algoritmus pro výpočetně rychlou diskrétní Fourierovu transformaci (DFT). Je vhodné tyto dva názvy rozlišovat.
- Ve druhé části by mělo být věnováno více pozornosti prostorům funkcí, se kterými se pracuje.
- Poznámka pod čarou na straně 10 je důležitá pro další text, měla by být normální součástí



textu.

- Na straně 12 chybí definice matice  $F$ .
- Není jasné, co je  $n$  na straně 14.
- Řádky 10-16 v Algoritmu 1 nedávají smysl (i když je zřejmé, o co jde). Pravděpodobně jde o pracovní verzi této části textu.
- V posledním odstavci části 5 (Implementation notes) je navržen postup, jak získat pseudo-inverzi singulárního bloku  $\hat{K}_{(i)}^{\text{ref}}[1, 1]$ . Zdá se, že získaná matice nemusí být symetrická. Zajímalo by mne, zda se tato metoda osvědčila a zda ji lze použít i pro vektorové úlohy.

Práce odeslaná do Rektorysovy soutěže má formu článku, který je připravován k odeslání k posouzení a k publikaci v časopise. Spoluautory jsou vědečtí pracovníci a doktorandi mezinárodní skupiny, která se věnuje vývoji teorie a softwaru pro výpočet efektivních vlastností materiálů, homogenizaci. Podíl Martina Ladeckého na hlavním nápadu pro vylepšení stávající teorie odhaduji na 35%, podíl na implementování nových numerických postupů do softwaru, který již skupina vyvinula v uplynulé době, je asi 70%, podíl na provedení numerických experimentů odhaduji na 90% a podíl na vytvoření textu článku na asi 80%.

Ivana Pultarová

Katedra matematiky  
Fakulta stavební ČVUT v Praze

Dne 1. listopadu 2021 v Praze

# Posudek na soutěžní práci

Práce: **Fundamental Bounds on Magnetic Levitation and Magnetic Confinement**

Autor práce: **Ing. Jakub Liška**

Předložená práce studenta Jakuba Lišky je pokračováním jeho práce bakalářské a řeší vědecky aktuální téma principiálních omezení v elektromagnetismu, přičemž si vybírá oblast magnetické levitace a magnetických pastí, pro které doposud žádná principiální omezení nebyla zformulována. Z tohoto pohledu je zvolené téma mimořádně náročné jak po technické, tak intelektuální stránce a student byl odkázán především na vlastní tvůrčí práci a spolupráci se školiteli. Převzatou myšlenkou práce je tak pouze obecná formulace principiálních omezení založených na proudové hustotě a samozřejmě matematicko-fyzikální popis elektromagnetické interakce.

Vyřešení úkolů diplomové práce vyžadovalo dobrou znalost metod analytické a numerické matematiky (integrální rovnice pro pole, Galerkinova metoda, kvadratické programování) i dobrou znalost teorie elektromagnetického pole. Nadto bylo nutné vypracovat řadu programovacích úkolů, aby matematické formulace byly přetvořeny v inženýrská data. Všechny tyto úkoly student nejen zvládl, ale především na jejich základě spočítal inženýrsky relevantní data, která jsou vědecky původní a budou součástí vědeckého článku v časopise APS (American Physical Society).

Kromě vlastní inženýrské práce bych u práce vyzdvihl i její formální provedení, především profesionálně vypadající šablonou, sazbu a pečlivost matematické notace. Za vysoce nadprůměrné považuji i zpracování grafiky v prostředí Tikz.

V Praze dne 4. 11. 2021

doc. Ing. Lukáš Jelínek, Ph.D.  
Katedra elektromagnetického pole  
Fakulta elektrotechnická

**Daniela Opočenská: Kritický exponent balancovaných slov**

Práce se věnuje jisté třídě nekonečných posloupností, jejichž prvky nabývají konečně mnoho hodnot; v kombinatorické terminologii je práce věnována nekonečným slovům nad konečnou abecedou. Historie kombinatoriky na slovech začíná důkazem existence nekonečného slova, v němž se neopakují po sobě dva stejné úseky. Když Axel Thue v roce 1912 takové slovo nad ternární abecedou konstruoval, netušil, že bude použito o 30 let později k elegantnímu vyvrácení pologrupové modifikace Burnsidovy hypotézy. Výzkum, jakým velkým repetícím se lze v nekonečných slovech nad abecedou o  $d$  písmenech vyhnout, patří od té doby ke klasickým otázkám kombinatoriky na slovech.

Danielina práce se vyjadřuje k této otázce pro tzv. balancovaná slova a navazuje na výsledky dosažené Rampersadem, Shallitem a Vandamme, kteří popsali pro abecedy velikosti  $d = 2, 3$  a  $4$  minimální repetice, které nevyhnutně v nekonečném balancovaném slově najdeme. Zmínění autoři také vyslovili domněnku (RSV-domněnka), pro abecedy obecné velikosti  $d$ . Jejich domněnka byla později potvrzena Baranwalem a Shallitem pro hodnoty  $d = 5, 6, 7$  a  $8$ . Metoda, kterou toho dosáhli, spočívá ve využití počítače, avšak pro větší hodnoty parametru  $d \geq 9$  už přesahuje možnosti výpočetní techniky. S kolegy L. Dvořákovou a F. Dolcem jsme navrhli metodu, jak repetice v balancovaných slovech počítat efektivněji. Metoda je komplikovaná a spočívá na nástrojích teorie čísel.

Daniela se prokousala složitými teoretickými výsledky, hlavně z oblasti řetězových zlomků, teorie matic, teorie grafů a kombinatoriky na slovech - to vše je pro studentku bakalářského studia nové. Její **hlavní přínos** však spočívá v tom, že

- převedla obecně popsané postupy do několika algoritmů a ty posléze implementovala. Nejdříve byly výsledky jejího algoritmu pro výpočet maximální repetice v zadaném balancovaném slově srovnávány s výsledky kanadské skupiny. Podařilo se rozšířit platnost jejich hypotézy i na abecedy o velikosti  $9$  a  $10$ .
- Jelikož její program pracuje velice rychle (zvládá výpočet kritické repetice pro zadanou balancovanou posloupnost v jednotkách sekund), navrhla Daniela i algoritmus, který pro zadanou periodu řetězového zlomku najde předperiodu, která dává balancované slovo s minimální repeticí. Její program je uživatelsky tak komfortní, že přímo vyzývá testovat jiné typy balancovaných slov, než na kterých se nabývala minima na malých abecedách. To nakonec vedlo k nalezení slov nad  $11$  a  $12$ prvkovou abecedou, která vyvrátila platnost RSV-domněnky. To vše je obsahem naší společné publikace, která je téměř připravena k odeslání do časopisu, kde RSV-domněnka i její potvrzení pro malé hodnoty byly publikovány.

Využití programů vytvořených Danielou Opočenskou nekončí vyvrácením předchozí hypotézy. Vyslovili jsme novou hypotézu pro minimální repetice a doufáme, že se nám ji podaří v součinnosti s Danielou také dokázat.

# Posudek na soutěžní práci

Práce: **Popis interakcí v komplexních systémech pomocí maximálně entropických funkcí**

Autor práce: **Bc. Katarína Studeničová**

V předložené práci „Popis interakcí v komplexních systémech pomocí maximálně entropických funkcí“ se Katarína Studeničová zabývá problémy souvisejícími s charakterizací komplexních systémů prostřednictvím jejich reprezentace jako sítě, respektive hypersítě kvantifikující existenci a sílu statistické závislosti mezi páry prvků systému, respektive obecněji v rámci  $k$ -tic takových prvků. V tomto kontextu se v aplikované literatuře objevily návrhy kvantifikovat pomocí takzvané spojené informace (connected information) úroveň, do které jsou interakce mezi veličinami charakterizujícími jednotlivé prvky komplexního systému zachyceny při jeho popisu prostřednictvím charakterizace závislostí jen do  $k$ -tého řádu. Navržené postupy v literatuře kvantifikují relativní rozdíl entropie pozorovaného rozdělení od maximálně entropického rozdělení při zachování závislostí do  $k$ -tého řádu, ale liší se volbou metod zachycení těchto závislostí a dalších aspektech včetně způsobu zavedení relevantních objektů, mnohdy poměrně neformálního. Právě porovnání různých konstrukcí spojené informace, vyžadující i jejich formálnější zavedení s využitím vhodné jednotnější notace, je jedním z cílů předložené práce a otevírá možnost návrhu alternativních konstrukcí spojené informace výhodnějších z výpočetního nebo interpretačního hlediska.

Po uvedení do problematiky předkládá autorka v prvních dvou kapitolách základní pojmy a definice z oblasti pravděpodobnosti a teorie informace. V třetí kapitole nejprve formálně zavádí klíčové pojmy nutné k definici spojené informace, respektive jejích variant při zachování marginálních rozdělení, momentů, nebo entropií do  $k$ -tého řádu. Následně dokazuje základní věty o chování posloupnosti spojených informací jako funkce řádu a některé vztahy mezi jednotlivými konstrukcemi. Ve čtvrté kapitole se pak věnuje otázce vztahu existence interakce  $k$ -tého řádu mezi veličinami, a nenulovosti spojené informace  $k$ -tého řádu. Ukazuje, že tato (pro interpretaci potenciálně důležitá) souvislost nemusí nutně platit, ale formuluje některé postačující podmínky pro její platnost. V závěru studentka přehledně shrnuje a dává do širšího kontextu zavedené konstrukce a jejich dokázané vlastnosti.

Na tomto místě je vhodné upozornit, že soutěžní práce představuje v kompaktní formě vybrané výsledky mnohem rozsáhlejší bakalářské práce, kterou autorka nedávno úspěšně obhájila na katedře matematiky FJFI s nejlepším hodnocením. Původní výsledky zahrnovaly další rozsáhlý materiál, včetně rigorózních důkazů v soutěžní práci prezentovaných matematických vět, a dalších dvou kapitol

obsahujících výsledky aplikující pojem informačního diagramu, který je centrální pro další konstrukci prezentovanou v literatuře, a rovněž autorkou nově zavedenou výpočetně výhodnou alternativní aproximativní konstrukci.

Celkově má soutěžní práce velmi vysokou úroveň. Přestože popisované objekty, a potřeba jejich srovnatelnosti, vyžadují poměrně netriviální konstrukce, jsou i poměrně technické pasáže psány srozumitelně a s naprostým minimem překlepů či jazykových chyb. Obě přípravné/rešeršní kapitoly shrnují přehledně nutné pojmy, odkazují na relevantní literaturu a fundamentálně motivují následně řešené dílčí úkoly. Studentka zvolila možná netradičně kombinaci relativně formální strukturace textu, kde kromě jinak standardních vět a definic je celkově detailní a dobře motivující výklad členěn do formálně poctivě číslovaných poznámek a příkladů. Vlastní zavedení spojených informací a odvození jejich vlastností obsahují samostatné precizní výsledky. I přes nutné zkrácení soutěžní práce stále jasně odráží tematickou šíři zpracovaných problémů v obtížné oblasti modelování komplexních systémů, která využívá konceptů z pravděpodobnosti, teorie informace i statistické fyziky.

Jako vedoucí bakalářské práce autorky příspěvku mohu z osobní zkušenosti konstatovat, že ve svém výzkumu studentka nejen beze zbytku plní náročné počáteční úkoly, ale s vědeckým zápalem a s velmi vysokou mírou samostatnosti (a přitom ochotou a schopností operativně přepracovat strukturu vět, důkazů i značení při nalezení korektnějšího postupu v rámci konzultací) zvládá rozsáhlý repertoár matematických nástrojů, aby tak vytvořila originální výzkumný příspěvek, který - po překladu do angličtiny a přeformování do článku - bude jistě cenným přínosem mezinárodní odborné komunitě. Příspěvek mohu soutěžní komisi bez váhání doporučit k ocenění.



Praha, 3. listopadu 2021

Ing. Mgr. Jaroslav Hlinka, Ph.D.



## **Nesoutěžní příspěvky**





# Modelování transportních procesů v porézním prostředí

Judita Runcziková \*

\* Katedra matematiky FSv ČVUT, judita.runczikova@fsv.cvut.cz

**Abstrakt.** Příspěvek se zabývá problematikou matematického modelování procesů v porézním prostředí. V úvodu je popsán model navržený autory B. Albers, P. Krejčí a E. Rocca [1], který zahrnuje transport vlhkosti a tepla v deformovatelném porézním prostředí při uvažování hystereze jevů.

Dále je uvedena počítačová implementace modelu, který je zjednodušením původního modelu. Je řešena spřažená úloha pružnosti a nelineárního proudění vlhkosti v porézním prostředí. Sestává se z evolučních nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, které jsou řešeny metodou časové diskretizace a metodou konečných diferencí. Popsány jsou různé typy okrajových podmínek, zejm. smíšená okrajová podmínka, jejich výhody a také obtíže jejich aplikace v algoritmu v programu Matlab.

**Poděkování.** Práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS21/005/OHK1/1T/11.

## Literatura:

- [1] Albers B., Krejčí P., Rocca E. *Solvability of an Unsaturated Porous Media Flow Problem with Thermomechanical Interaction*. SIAM J. Math. Anal. 48, 2016, 4175-4201.





Editor	Stanislav Olivík
Název díla	Sborník abstraktů Studentské konference a Rektorysovy soutěže
Vydalo	České vysoké učení technické v Praze
Zpracovala	Fakulta stavební
Kontaktní adresa	Katedra matematiky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, Praha 6
Tel.	+420 22435 4390
Počet stran	32
Vydání	1.

Neprodejné.

Praha 2021