



Katedra matematiky  
Fakulta stavební ČVUT v Praze

# **SBORNÍK**

## **abstraktů**

Studentské konference  
a  
**Rektorysovy soutěže**

10. listopadu 2023  
Praha

Vydavatel: Katedra matematiky, FSv ČVUT v Praze  
Praha 2023

Editor: Stanislav Olivík

Podpořeno grantem SGS ČVUT, SVK 01/23/F1

# Předmluva

Katedra matematiky Fakulty stavební ČVUT opět pořádá Studentskou vědeckou konferenci, v jejímž rámci se koná Rektorysova soutěž. Připomeňme si, že v roce 2007 se konal 0. ročník, letos se koná již 16. ročník. Soutěž byla v minulých letech organizována buď našimi kolegy z FJFI ČVUT nebo naší katedrou.

Letošní ročník se stejně jako v loňském roce koná jako videokonference.

Prezentované práce jsou z různých oblastí aplikované matematiky. Mnoho z nich souvisí s bakalářskými, diplomovými nebo disertačními pracemi účastníků konference.

Organizátoři konference by zde rádi poděkovali především účastníkům konference a Rektorysovy soutěže, dále vedoucím studentských prací, oponentům a členům odborné hodnotící poroty za jejich práci, která přispěla k vysoké úrovni a prestiži konference. Dále je potřeba zdůraznit významný přínos webmastera Studentské konference a Rektorysovy soutěže Stanislava Olivíka, bez jehož činnosti by se videokonference nemohla uskutečnit.

Organizace konference je financována z grantu SVK 01/23/F1 uděleného naší katedře grantovou komisí Studentské grantové soutěže ČVUT. Tímto děkujeme grantové komisi za podporu organizace konference i Rektorysovy soutěže.

Informace o Studentské vědecké konferenci a Rektorysově soutěži lze nalézt na webových stránkách <https://mat.fsv.cvut.cz/rektorys/soutez/>.

V Praze dne 9. 11. 2023

Jozef Bobok  
František Bubeník  
Martin Soukenka



## Karel Rektorys

Prof. RNDr. Karel Rektorys, DrSc. (1923-2004) působil na ČVUT od roku 1954 do roku 2004, tedy celých 50 let. Stal se významnou osobností mezi vědci. Proslavil se zejména metodou časové diskretizace při řešení parciálních diferenciálních rovnic. Profesor Rektorys měl obrovskou autoritu i jako pedagog. Jeho přednášky se staly fenoménem. Jako vystudovaný matematik dokázal překlenout hranice matematiky a inženýrských oborů. Podílel se například na projektu stavby Orlické přehrady. Byl autorem řady publikací, *Variační metody v inženýrských problémech* a v problémech matematické fyziky, *Metoda časové diskretizace a parciální diferenciální rovnice*, *Co je a k čemu je vyšší matematika*, a byl vedoucím kolektivu autorů světoznámého *Přehledu užití matematiky*.





# Obsah

## Soutěžní příspěvky

Marek Belda	9
<i>Zlepšení tvaru leteckých profilů pomocí adjungované optimalizace a panelové metody</i>	
Adam Blažek	12
<i><math>w</math>-NAF Representations of Complex Integers</i>	
Jan Bureš	13
<i>Hledání optimálního tvaru stěn matematického modelu proudění krve v problematice úplného kavopulmonálního cévního napojení</i>	
Barbora Hálková	14
<i>Description of viscoelastic materials with fractional calculus</i>	
Veronika Hendrychová	16
<i>String Attractors of Pseudostandard and Rote Sequences</i>	
Dominik Horák	19
<i>Numerický model neizotermálního proudění a obtékání překážek založený na mřížkové Boltzmannově metodě</i>	
Lenka Horvátová	21
<i>Matematické modelování transportu a přestupu kontrastní látky do okolní tkáně v problematice perfuze myokardu</i>	
Kamila Houšková	23
<i>On Triangular Norms and Their Generators</i>	
Jakub Malášek	25
<i>Matematická analýza invariantních množin</i>	
Daniela Opočenská	26
<i>Asymptotic repetitive threshold of balanced sequences</i>	

## Nesoutěžní příspěvky

Liya Gaynutdinova	29
<i>Guaranteed lower bounds to effective stiffness</i>	
Judita Runcziková	30
<i>Numerická simulace cyklického zatěžování zrnitých materiálů</i>	





## **Soutěžní příspěvky**



# Zlepšení tvaru leteckých profilů pomocí adjungované optimalizace a panelové metody

Marek Belda<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky, Fakulta strojní ČVUT v Praze,  
Marek.Belda@fs.cvut.cz

**Abstrakt.** Tato práce se zabývá adjungovanou optimalizací vztlakového profilu, která byla použita v kombinaci s panelovou metodou pro řešení proudění. Výhodou adjungované metody je zejména její nízká výpočetní náročnost, která je při optimalizaci v mechanice tekutin velmi důležitým kritériem při výběru metody. V této práci je provedeno rigorózní odvození adjungované metody a všech rovnic potřebných pro optimalizaci. Výsledkem práce je script pro optimalizaci vztlakového profilu, jehož výstupy byly verifikovány nezávislým výpočtem v programu Xfoil. Vzhledem k výpočetní nenáročnosti scriptu je tuto optimalizaci možné využít již v raných fázích návrhu a získat tak nejlepší možné výsledky. Také bylo provedeno zkoumání chování optimalizovaných profilů v návrhových i nenávrhových provozních režimech.

**Poděkování.** Nejvíce bych chtěl poděkovat mému vedoucímu, panu doc. Ing. Tomáši Hyhlíkovi, Ph.D. za užitečné rady, věcné připomínky a trpělivost při vedení této práce. Dále bych chtěl také poděkovat panu doc. RNDr. Stanislavu Kračmarovi, CSc. za cenné rady a přínosné konzultace týkající se matematického aparátu použitého v této práci.

## Literatura:

- [1] LUO, JiaQi, JunTao XIONG a Feng LIU. Aerodynamic design optimization by using a continuous adjoint method. *SCIENCE CHINA: Physics, Mechanics & Astronomy*. 2014, **57**(7), 1363-1375. ISSN 1674-7348. Dostupné z: doi:10.1007/s11433-014-5479-0
- [2] GILES, Michael B. a Niles A. PIERCE. An Introduction to the Adjoint Approach to Design. *Flow, Turbulence and Combustion*. 2000, **65**(34), 393-415. ISSN 13866184. Dostupné z: doi:10.1023/A:1011430410075
- [3] JAMESON, Anthony. *Aerodynamic Shape Optimization Using the Adjoint Method* [online]. In: . [cit. 2022-05-05]. Dostupné z: <http://aero-comlab.stanford.edu/Papers/jameson.vki03.pdf>

- [4] LAVRENTĚJEV, Michail Aleksejevič a Lazar Aronovič LJUSTERNIK, Karel WINKELBAUER. *KURS VARIACNÍHO POČTU*. I. vydání. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952.
- [5] *Hess-Smith Panel Method: AA200b - Applied Aerodynamics II - Lecture 3*. 2005.
- [6] SOBIECZKY, Helmut. Parametric Airfoils and Wings. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. 1998, (68), 71-88.
- [7] ARIAS-MONTAÑO, Alfredo, Carlos A. COELLO COELLO a Efrén MEZURA-MONTES. Evolutionary Algorithms Applied to Multi-Objective Aerodynamic Shape Optimization. *Computational Optimization, Methods and Algorithms*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011, 211-240. Studies in Computational Intelligence. ISBN 978-3-642-20858-4. Dostupné z: doi:10.1007/978-3-642-20859-1\_10
- [8] DELLA VECCHIA, Pierluigi, Elia DANIELE a Egidio D'AMATO. An airfoil shape optimization technique coupling PARSEC parameterization and evolutionary algorithm. *Aerospace Science and Technology*. 2014, **32**(1), 103-110. ISSN 12709638. Dostupné z: doi:10.1016/j.ast.2013.11.006
- [9] AKRAM, Md Tausif a Man-Hoe KIM. Aerodynamic Shape Optimization of NREL S809 Airfoil for Wind Turbine Blades Using Reynolds-Averaged Navier Stokes Model—Part II. *Applied Sciences*. 2021, **11**(5). ISSN 2076-3417. Dostupné z: doi:10.3390/app11052211
- [10] KHURANA, Manas, Hadi WINARTO a Arvind SINHA. Airfoil Optimisation by Swarm Algorithm with Mutation and Artificial Neural Networks. *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting including The New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2009, -. ISBN 978-1-60086-973-0. Dostupné z: doi:10.2514/6.2009-1278
- [11] NLF(1)-0115 (nlf0115-il). In: *Airfoil Tools* [online]. 2023 [cit. 2023-03-16]. Dostupné z: <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=nlf0115-il>
- [12] NASA/LANGLEY NLF 0414F AIRFOIL (nlf414f-il). In: *Airfoil Tools* [online]. 2023 [cit. 2023-05-18]. Dostupné z: <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=nlf414f-il>
- [13] J. K., Viken, Viken S. A., Pfenninger W., Morgan H. L., JR. a Campbell R. L. *DESIGN OF THE LOW-SPEED NLF(1)-0414F ANI) THE HIGH-SPEED HSNLF(1)-0213 AIRFOILS WITH HIGH-LIFT SYSTEMS*. 1985.
- [14] JAMESON, Antony. Aerodynamic Design via Control Theory. *Journal of Scientific Computing*. Plenum Publishing Corporation, 1988, (3), 233-245.

- [15] GOODMAN, Ben. Sequential quadratic programming. In: *Cornell University Computational Optimization Open Textbook* [online]. 2022 [cit. 2023-05-18]. Dostupné z: [https://optimization.cbe.cornell.edu/index.php?title=Sequential\\_quadratic\\_programming](https://optimization.cbe.cornell.edu/index.php?title=Sequential_quadratic_programming)
- [16] *Airfoil Tools* [online]. [cit. 2023-05-18]. Dostupné z: <http://airfoiltools.com/>
- [17] NOŽIČKA, Jiří. Podzvukové proudění. In: NOŽIČKA, Jiří. *Dynamika plynů*. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2005, s. 96 - 105. ISBN 80-01-03300-7.

# **w-NAF Representations of Complex Integers**

**Adam Blažek**

FJFI ČVUT, blazead5@cvut.cz

**Abstract.** The Penney numeration system is a positional numeration system with base  $i-1$  and digits  $\{0, 1\}$ , capable of representing all Gaussian integers (complex numbers whose real and imaginary part are integers). We extend it by using the digit set  $\{0, \pm 1, \pm i\}$ , causing numbers to have multiple representations. We generalize earlier results about the binary system with digits  $\{0, \pm 1\}$  to this system; in particular, using the  $w$ -NAF property to find a canonical representation for each number with the minimum possible Hamming weight, calculating the average ratio of non-zero digits in such representations and finding numbers which have the highest count of optimal representations of a given weight.

## **References**

- [1] Z. Masáková, E. Pelantová, M. Svobodová: *Algebraické metody v teoretické informatice*, Department of Mathematics FNSPE CTU in Prague (2023), pp. 1–7.
- [2] J. Krásenský: *Množiny generované číselnými soustavami v kvaternionech*, SVOČ (2016), pp. 9–11.
- [3] J. Tůma, J. Vábek: *On the number of binary signed digit representations of a given weight*, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Volume 56, Issue 3 (2015), pp. 287–306, <https://dml.cz/manakin/handle/10338.dmlcz/144345>
- [4] C. Heuberger, D. Krenn: *Optimality of the Width- $w$  Non-adjacent Form: General Characterisation and the Case of Imaginary Quadratic Bases*, arXiv:1110.0966v1 (October 2011), <https://doi.org/10.48550/arXiv.1110.0966>; *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, Volume 25 no. 2 (2013), pp. 353–386, <https://doi.org/10.5802/jtnb.840>.
- [5] C. Heuberger, D. Krenn: *Analysis of width- $w$  non-adjacent forms to imaginary quadratic bases*, *Journal of Number Theory*, Volume 133, Issue 5 (May 2013), <https://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2012.08.029>.
- [6] R. Bellman: *On a routing problem*, *Quarterly of Applied Mathematics*, Volume 16 (1958), pp. 87–90, <https://doi.org/10.1090/qam/102435>

# Hledání optimálního tvaru stěn matematického modelu proudění krve v problematice úplného kavopulmonálního cévního napojení

Jan Bureš\*

\*Katedra matematiky FJFI ČVUT v Praze, buresj11@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** Tato práce se zabývá optimalizací tvaru stěn v rámci modelování proudění nestlačitelné newtonovské tekutiny se zaměřením na modelování proudění krve v cévách. Je představen a implementován optimalizační rámec, který lze následně využít pro řešení optimalizačních úloh týkajících se proudění tekutin okolo rigidních překážek ve 2D. Pro numerické řešení matematického modelu je zvolena mřížková Boltzmannova metoda, která je stručně popsána. Na hranici obtékaných těles jsou předepsány interpolační okrajové podmínky, které jsou popsány a dále použity. Díky interpolačním okrajovým podmínkám je zohledněn skutečný tvar hranice těles. V teoretické části jsou pak dále popsány metody matematické optimalizace použité v této práci. Dále je popsán balík využitý k automatickému generování geometrií použitelných v numerických simulacích, který byl implementován pro účely této práce. Praktická část demonstruje a analyzuje použití optimalizačního rámce na sérii vhodně navržených testovacích úloh. Na závěr jsou prezentovány výsledky optimalizační úlohy zjednodušeného modelu totálního kavopulmonálního spojení ve 2D, které jsou ve shodě s dostupnou literaturou. Použití optimalizačního rámce lze tedy považovat za úspěšné.

## Literatura:

- [1] T. Krüger, et al. *The Lattice Boltzmann Method*. Springer International Publishing, 2017.
- [2] D. Bertsekas. „*Nonlinear programming*”. Athena Scientific, 2016.
- [3] C. Audet a W. Hare. „*Derivative-free and blackbox optimization*”. Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 1. edice, 2017.
- [4] F. M. Rijnberg, et al. „Energetics of blood flow in cardiovascular disease”. *Circulation*, 137(22):2393–2407, 2018.
- [5] A. Porfiryev, et al. „Fontan hemodynamics investigation via modeling and experimental characterization of idealized pediatric total cavopulmonary connection”. *Applied Sciences*, 10(19):6910, 2020.
- [6] A. L. Marsden, J. A. Feinstein a Ch. A. Taylor. „A computational framework for derivative-free optimization of cardiovascular geometries”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21-24):1890–1905, 2008.

# Description of viscoelastic materials with fractional calculus

Barbora Hálková\*

\*Department of Mechanics, Faculty of Civil Engineering, CTU,  
barbora.halkova@fsv.cvut.cz

**Abstract.** Theory of viscoelasticity describes materials behaving somewhere between purely elastic and purely viscous, it deals with the time dependent behaviour of materials. The theoretical models are either constructed as a connection of elastic springs and viscous dashpots or the principles of fractional calculus can be introduced together with another rheological element, the springpot. This element itself has the elasticity and viscosity as the limit cases of its behaviour while it behaves somewhere between. This fractional element can also be used as a part of more complex viscoelastic models. This paper further examines the generalized Maxwell model in its standard and fractional form and its behaviour under dynamic loading.

**Acknowledgements.** This research was supported by the Czech Science Foundation, the grant No. 22-15553S, and by SGS, project number SGS23/001/OHK1/1T/11.

## Bibliography:

- [1] Brdička, Miroslav and Hladík, Arnošt, *Teoretická mechanika*. Academia, 1987.
- [2] Gresham, Robert M., *Viscosity: A fluid's resistance to flow*. Society of Tribologists and Lubrication Engineers, 2008.
- [3] Hálková, Barbora, *Viskoelastic description of polymer interlayer of laminated glass*. České vysoké učení technické v Praze. Vypočetní a informační centrum, 2022.
- [4] Hána, Tomáš and Janda, Tomáš and Schmidt, Jaroslav and Zemanová, Alena and Šejnoha, Michal and Eliášová, Martina and Vokáč, Miroslav, *Experimental and numerical study of viscoelastic properties of polymeric interlayers used for laminated glass: Determination of material parameters*. Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 2019.
- [5] Jirásek, Milan and Zeman, Jan, *Přetváření a porušování materiálu: dotvarování, plasticita, lom a poškození*. České vysoké učení technické v Praze, 2006.
- [6] Kelly, Piaras, *Solid mechanics part I: An introduction to solid mechanics*. A Creative Commons Attributions, Mountain View, CA, 2013.
- [7] Khatib, Jamal, *Sustainability of construction materials*. Woodhead Publishing, 2016.
- [8] Levy, D., *Numerical Differentiation*. University of Maryland, 2010.



- [9] Lubich, Ch., *Discretized fractional calculus*. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1986.
- [10] Máca, Jiří, *Dynamika stavebních konstrukcí 1. 1. vydání*. Praha: ČVUT, 2016.
- [11] Oldham, Keith and Spanier, Jerome, *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier, 1974.
- [12] Ružičková, Mgr Irena and Hlavička, RNDr Rudolf, *Numerické metody*.
- [13] Schmidt, Jaroslav, *Experimental and numerical analysis of laminated glass under dynamic loading*. České vysoké učení technické v Praze. Vypočetní a informační centrum, 2018.
- [14] Wang, Xing-er and Yang, Jian and Liu, Qing-feng and Zhang, Yang-mei and Zhao, Chenjun, *A comparative study of numerical modelling techniques for the fracture of brittle materials with specific reference to glass*. Engineering Structures, Elsevier, 2017.

# String Attractors of Pseudostandard and Rote Sequences

Veronika Hendrychová\*

\*Katedra matematiky FJFI ČVUT, hendrver@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** Atraktor řetězce je relativně nový kombinatorický pojem, který je úzce spojen s měřením komplexity slov a sjednocuje pohledy na jednotlivé míry monotónnosti indukované slovníkovými kompresory. V kontextu kombinatoriky na slovech, zejména u tříd slov s nízkou komplexitou, nicméně nebyly atraktory studovány příliš rozsáhle. V této práci studujeme atraktory těchto tříd slov, konkrétně pseudopalindromických prefixů pseudostandardních a komplementárně symetrických Roteho slov, a formálně dokazujeme jejich minimalitu. Představujeme, implementujeme a experimentálně hodnotíme programy v jazyce Python pro generování těchto slov a jejich atraktorů, ověřování předpokládaného atraktoru daného slova a identifikaci minimálního atraktoru daného slova.

## Literatura:

- [1] T. Akagi, M. Funakoshi, and S. Inenaga. Sensitivity of string compressors and repetitiveness measures. *Information and Computation*, 291, 2023. doi: 10.1016/j.ic.2022.104999.
- [2] H. Bannai, K. Goto, M. Ishihata, S. Kanda, D. Köppl, and T. Nishimoto. Computing np-hard repetitiveness measures via max-sat. *ESA*, 2022. doi: 10.48550/arXiv.2207.02571.
- [3] M. Burrows and D. J. Wheeler. A block sorting lossless data compression algorithm. *SRC Research Report, Digital Equipment Corporation, California*, 1994.
- [4] M. Crochemore and R. V´erin. On compact directed acyclic word graphs. *Structures in Logic and Computer Science*, page 192–211, 1997. doi: 10.1007/3-540-63246-8\_12.
- [5] A. de Luca and F. Mignosi. Some combinatorial properties of sturmian words. *Theoretical Computer Science*, 136:361–385, 1994.
- [6] F. Dolce. String attractors for factors of the thue-morse word. *Frid, A., Merca¸s, R. (eds) Combinatorics on Words. WORDS 2023. Lecture Notes in Computer Science, vol 13899. Springer, Cham., 2023.*
- [7] X. Droubay, J. Justin, and G. Pirillo. Episturmian words and some constructions of de luca and rauzy. *Theoretical Computer Science*, 255:539–553, 2001.
- [8] L. Dvořáková. String attractors of episturmian sequences. 2022. doi: 10.48550/arXiv.2211.01660. URL <https://arxiv.org/pdf/2211.01660v2.pdf>.

- [9] L. Dvořáková and J. Florian. On periodicity of generalized pseudostandard words. *Electron. J. Comb.*, 23(1):9, 2016.
- [10] P. Ferragina and G. Manzini. Opportunistic data structures with applications. 2000. doi: 10.1109/SFCS.2000.892127.
- [11] J. Fuchs and P. Whittington. The 2-attractor problem is np-complete. 2023.
- [12] F. Gheeraert, G. Romana, and M. Stipulanti. String attractors of fixed points of  $k$ -bonacci-like morphisms. *WORDS*, 2023. doi: 10.48550/arXiv.2302.13647.
- [13] D. Kempa and N. Prezza. At the roots of dictionary compression: String attractors. *STOC'18*, 2018. doi: 10.48550/arXiv.1710.10964.
- [14] D. Kempa, A. Policriti, N. Prezza, and E. Rotenberg. String attractors: Verification and optimization. *ESA*, 2018. doi: 10.4230/LIPICS.ESA.2018.52.
- [15] Takuya Kida, Tetsuya Matsumoto, Yusuke Shibata, Masayuki Takeda, Ayumi Shinohara, and Setsuo Arikawa. Collage system: A unifying framework for compressed pattern matching. *Theoretical Computer Science*, 298(1):253–272, 2003. doi: 10.1016/S0304-3975(02)00426-7.
- [16] T. Kociumaka, G. Navarro, and N. Prezza. Towards a definitive measure of repetitiveness. *LATIN, LNCS, vol. 12118, Springer*, pages 207–219, 2020.
- [17] K. Kutsukake, T. Matsumoto, Y. Nakashima, S. Inenaga, H. Bannai, and M. Takeda. On repetitiveness measures of thue-morse words. *SPIRE, LNCS, vol. 12303, Springer*, pages 213–220, 2020.
- [18] S. Mantaci, A. Restivo, G. Romana, G. Rosone, and M. Sciortino. A combinatorial view on string attractors. *Theoretical Computer Science*, 850:236–248, 2021.
- [19] A. Blondin Massé, G. Paquin, H. Tremblay, and L. Vuillon. On generalized pseudo-standard words over binary alphabet. *Integer Seq.*, 16:Article 13.2.11, 2013.
- [20] M. Morse and G. A. Hedlund. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. *American Journal of Mathematics*, 62:1–42, 1940.
- [21] N. Prezza. String attractors. 2017. doi: 10.48550/arXiv.1709.05314. URL <https://arxiv.org/abs/1709.05314>.
- [22] A. Restivo, G. Romana, and M. Sciortino. String attractors and infinite words. 2022. doi: 10.48550/arXiv.2206.00376.
- [23] G. Rote. Sequences with subword complexity  $2n$ . *Number Theory*, 46:196 – 213, 1994. doi: 10.1006/jnth.1994.1012. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X84710122>.

- [24] D. Salomon and G. Motta. *Handbook of Data Compression*. Springer, 2010. ISBN 978-1-84882-902-2.
- [25] L. Schaeffer and J. Shallit. String attractors of automatic sequences. 2020. doi: 10.48550/ARXIV.2012.06840.
- [26] J. A. Storer and T. G. Szymanski. The macro model for data compression. *In Proc. 10th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 1978)*, pages 30–39, 1978. doi: 10.1145/800133.804329.
- [27] J. Ziv and A. Lempel. A universal algorithm for sequential data compression. *IEEE Transactions on Information Theory*, 23(3):337–343, 1977. doi: 10.1109/TIT.1977.1055714.

# Numerický model neizotermálního proudění a obtékání překážek založený na mřížkové Boltzmannově metodě

Dominik Horák

\*Katedra matematiky FJFI ČVUT, horakdo1@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** Práce se zabývá matematickým modelováním neizotermálního proudění nestlačitelné Newtonovské tekutiny. Práce si klade za cíl implementovat a popsat přestup tepla ve 3D numerickém modelu. V teoretické části je prezentován matematický model neizotermálního proudění Newtonovské tekutiny spolu se základním popisem chladicího okruhu studentské formule. Ve druhé části je čtenář seznámen s mřížkovou Boltzmannovou metodou (LBM) a poslední část je pak věnována diskuzi výsledků aplikace LBM s implementovaným přestupem tepla na matematický model. Implementace přestupu teploty byla úspěšná a metoda produkuje uspokojivé výsledky.

## Literatura:

- [1] J. Katz, *Race car aerodynamics: designing for speed*, R. Bentley (1995).
- [2] T. Krüger, H. Kusumaatmaja, A. Kuzmin, O. Shardt, G. Silva, and E. M. Viggien, *The lattice Boltzmann method*, Springer International Publishing, 10 (2017), 3–978.
- [3] Q. Zou, S. Hou, S. Chen, and G. D. Doolen, *A improved incompressible lattice Boltzmann model for time-independent flows*, Journal of Statistical Physics, 81 (1995), 35–48.
- [4] M. Geier, A. Greiner, and J. G. Korvink, *Properties of the cascaded lattice Boltzmann automaton*, International Journal of Modern Physics C, 18.04 (2007), 455–462.
- [5] O. Reynolds, *IV. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*, Philosophical transactions of the royal society of london.(a.), 186 (1895), 123–164.
- [6] P. Eichler, *Matematické modelování subsonického proudění okolo překážek pomocí metody Lattice–Boltzmann na GPU*, Bakalářská práce, 2016, České vysoké učení technické v Praze.
- [7] O. Reynolds, *XXIX. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 174 (1883), 935–982.
- [8] G. Buresti, *A note on Stokes’s hypothesis*, Acta Mechanica, 226.10 (2015), 3555–3559, Springer.

- [9] V. Uruba, *Turbulence*, Nakladatelství ČVUT, 2014.
- [10] P. Eichler, *Matematické modelování interakce elastického tělesa s nestlačitelnou tekutinou*, Diplomová práce, 2018, České vysoké učení technické v Praze.
- [11] M. Bouzidi, M. Firdaouss, and P. Lallemand, *Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries*, *Physics of Fluids*, 13.11 (2001), 3452–3459, American Institute of Physics.
- [12] D. d’Humières, *Generalized lattice-Boltzmann equations*, *Rarefied Gas Dynamics*, 159 (1992), 450–458, AIAA.
- [13] Z. Guo and C. Shu, *Lattice Boltzmann method and its application in engineering*, World Scientific, 2013.

# Matematické modelování transportu a přestupu kontrastní látky v problematice perfuze myokardu

Bc. Lenka Horvátová\*

\*Katedra matematiky FJFI ČVUT, horvalen@fjfi.cvut.cz

**Abstrakt.** Práce se zabývá matematickým modelováním situací vznikajících při perfuzi myokardu pomocí vpuštění kontrastní látky. Popis transportu a přestupu kontrastní látky z cévního řečiště do mimocévního prostředí je rozdělen na dvě části. Nejdříve na základě tlaků je spočítána rychlost v cévním systému, poté je do cévního řečiště vstříknuta kontrastní látka s danou koncentrací. Přestup kontrastní látky z cévního řečiště do mimocévního prostředí je modelován pomocí konvoluce s Diracovou delta funkcí. V dalším kroku je spočítána koncentrace v obou prostředích. Pro tento matematický model uvažujeme nestlačitelnou newtonovskou kapalinu, na kterou nepůsobí žádné vnější síly. Mimocévní prostředí je uvažováno jako porézní a rigidní. Hlavním cílem této práce je řešení problému transportu a přestupu kontrastní látky v cévním řečišti pomocí metody konečných objemů a v mimocévním prostředí metodou konečných diferencí.

**Poděkování.** Chtěla bych zde poděkovat především svému školiteli doc. Ing. Radku Fučíkovi, Ph.D. za pečlivost, ochotu, vstřícnost, cenné rady a odborné i lidské zázemí při vedení mé práce. Dále bych chtěla poděkovat konzultantovi mého výzkumu Ing. Jakubovi Solovskému, Ph.D.

## Literatura:

- [1] R. J. Leveque: *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press (2004).
- [2] Z. Chen, G. Huan, Y. Ma: *Computational methods for multiphase flows in porous media*. Society for Industrial and Applied Mathematics (2006).
- [3] R. Fučík, P. Eichler, R. Straka, P. Pauš, J. Klinkovský, T. Oberhuber: *On optimal node spacing for immersed boundary lattice Boltzmann method in 2D and 3D*. Computer and Mathematics with Applications 77 (2019), s. 1144-1162.
- [4] R. J. Leveque: *Finite Difference Methods for Differential Equations*. AMath 585-6 (1998).
- [5] C. S. Peskin: *The immersed boundary method*. Acta Numerica (2002), s. 479-517.
- [6] A. N. Cookson, J. Lee, C. Michler, R. Chabiniok, E. Hyde, D. Nordsletten, N. Smith: *Spatially Distributed Computational Model to Quantify Behaviour of Contrast Agent in MR Perfusion Imaging*. Medical Image Analysis 18 (2014), s. 1200-1216.

- [7] E. Vitásek: *Numerické metody*. SNTL-Nakladatelství technické literatury (1987).
- [8] P. M. Adler, J. F. Thovert: *Fractures and Fracture Networks*. Springer (1999).
- [9] R. Fučík, P. Strachota: *Úvod do dynamiky kontinua*. Skripta (2023).
- [10] L. Horvátová: *Matematické modelování transportu a přestupu kontrastní látky v problematice perfuze myokardu*. Bakalářská práce. České vysoké učení technické v Praze (2022).
- [11] T. Sauer, O. Runborg: *Numerical analysis*. Pearson (2011).



# On Triangular Norms and Their Generators

Kamila Houšková

Katedra kybernetiky, FEL, ČVUT, houskkam@fel.cvut.cz

**Abstrakt.** You might have already heard of the sorites paradox. We know that a million grains of sand is a heap of sand. We also know that if we take away one grain from a heap, it is still a heap. However, if we apply mathematical induction to those two statements enough times, there will only remain one grain of sand and logically, we should say that this grain is also a heap.

Unlike classical logic, where the only truth values are 0 and 1, fuzzy logic's truth values are in interval  $[0, 1]$  which makes them infinitely many. This allows statements to be partially true and resolves the sorites paradox. However, it brings up a question: if both  $a$  and  $b$  are partially true, how much true will be their conjunction? That is why we need fuzzy conjunctions, in other words, triangular norms (t-norms).

Many research papers were written on the topic of triangular norms that can be constructed by means of generators. Nevertheless, it is still not clear how a little change in a t-norm or a generator affects the other. We study derivatives of both t-norms and generators to clear this up. We introduce the notion of a balanced generator that, if defined, is unique to a given strict t-norm.

Afterward, we inspect the interplay of the derivatives of fuzzy conjunctions and their generators at the edges of the domain. In the end, we look at the interrelationship between the diagonal of a strict t-norm and its multiplicative generator.

## Literatura:

- [1] P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, vol. 4. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] G. Beliakov, "Fitting triangular norms to empirical data," in *Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*, pp. 261–272, Elsevier, 2005.
- [3] A. Popovič, "Approximating by Fuzzy Conjunctions," BSc. thesis, Czech Technical University in Prague, 2020.
- [4] K. Houšková, "The Interplay of Triangular Norms and Their Generators," BSc. thesis, Czech Technical University in Prague, 2023.
- [5] M. Navara and M. Petřík, "Generators of fuzzy logical operations," in *Algebraic Techniques and Their Use in Describing and Processing Uncertainty*, pp. 89–112, Springer, 2020.
- [6] M. Navara and P. Olšák, *Basics of Fuzzy Sets* (in Czech). Czech Technical University in Prague, 2007.

- [7] E. Trillas, “Menger’s trace in fuzzy logic,” *Theoria. Revista de Teoría, Historia y Fundamentos de la Ciencia*, vol. 11, no. 3, pp. 89–96, 1996.
- [8] F. Giannini, M. Diligenti, M. Maggini, M. Gori, and G. Marra, “T-norms driven loss functions for machine learning,” *Applied Intelligence*, pp. 1–15, 2023.
- [9] E. P. Klement, R. Mesiar, and E. Pap, *Triangular Norms. Trends in Logic*, vol. 8. Kluwer Academic, 2000.
- [10] J. Harmse, “Continuous fuzzy conjunctions and disjunctions,” *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 4, no. 3, pp. 295–314, 1996.
- [11] R. Mesiar, E. Pap, and E. P. Klement, “Generated triangular norms,” *Kybernetika*, vol. 3, p. 363 – 377, January 2000.
- [12] R. Mesiar and M. Navara, “Diagonals of continuous triangular norms,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 104, no. 1, pp. 35–41, 1999.
- [13] R. Lowen, *Fuzzy Set Theory: Basic Concepts, Techniques and Bibliography*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] K. Houšková and M. Navara, “Relations between the shapes of triangular norms and their generators,” Johannes Kepler University, June 2023.
- [15] V. Marko and R. Mesiar, “Continuous Archimedean t-norms and their bounds,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 121, no. 2, pp. 183–190, 2001.

# Matematická analýza invariantních množin

Jakub Malášek\*

\*Katedra matematiky FJFI ČVUT, malasjak@cvut.cz

**Abstrakt.** Tato práce se zabývá základními pojmy z problematiky invariantních množin a fraktální geometrie. Jsou v ní zmíněny nejznámější fraktální množiny, popsána jejich konstrukce a vlastnosti z pohledu topologie a teorie míry. Jsou zde definovány dolní a horní induktivní dimenze, jejich vzájemné vztahy a sumační vlastnosti. Dále jsou zde uvedeny dva postupy konstrukce vnější míry a zavedení Hausdorffovy míry a Hausdorffovy dimenze. Následně je uvedena problematika systémů iterovaných funkcí a možnosti vizualizace invariantních množin. Závěrečná část se věnuje vizualizaci invariantních množin pomocí algoritmu chaos game, který využívá systémy iterovaných funkcí a vliv pravděpodobnosti výběru funkcí na zobrazení invariantních množin.

# Asymptotic repetitive threshold of balanced sequences

Daniela Opočenská\*

\*Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, CTU, opocedan@jfifi.cvut.cz

**Abstract** Combinatorics on words is a relatively new part of mathematics; the first works date back to the 1900's, when Axel Thue studied the repetitions of factors consecutively in finite sequences. Repetitions in words and sequences are still popular, and the repetition threshold has been studied for many classes of sequences. We are interested in the critical exponent, which is defined as the supremum of the number of consecutive repetitions in a sequence, and the asymptotic critical exponent, which is the limes superior of the same thing, only we consider factors with length going to infinity.

A natural question to ask is: What is the smallest possible critical exponent for a sequence over a given alphabet? This question has been answered by Dejean's theorem [1]. In my bachelor thesis, we investigated similar bounds for the critical exponent of balanced sequences [4] and we were able to recreate the Dejean's theorem for balanced sequences in [3].

This time, we want to investigate the computation of the minimal asymptotic critical exponent, which has not yet been done. For this purpose, we introduce a new tool, *graph of admissible tails*, which allows us to determine whether there exists a balanced sequence over a given alphabet, which attains an asymptotic critical exponent lower than or equal to a given bound. Moreover, if such a word exists, the program will find it.

This tool allowed us to find the minimal asymptotic critical exponent of balanced sequences over alphabets up to ten letters, to show that the minimum is attained, and to find the sequences for which the bound is attained. The results have been accepted for publication, see [2] and this thesis is also my research project at FNSPE.

## Bibliography:

- [1] F. Dejean. Sur un théorème de Thue. *J. Combin. Theory. Ser. A*, 13:90–99, 1972.
- [2] Ľ. Dvořáková, D. Opočenská, and E. Pelantová. Asymptotic repetitive threshold of balanced sequences. *Math. Comp.*, 92:1403–1429, 2023.
- [3] Ľ. Dvořáková, D. Opočenská, E. Pelantová, and A. M. Shur. On minimal critical exponent of balanced sequences. *Theoretical Computer Science*, 922:158–169, 2022.
- [4] D. Opočenská. Kritický exponent balancovaných slov. Bachelor's thesis, České vysoké učení technické v Praze, 2022.

**Nesoutěžní příspěvky**



# Guaranteed lower bounds to effective stiffness

Liya Gaynutdinova<sup>1</sup>, Martin Ladecký<sup>2</sup>, Ivana Pultarová<sup>3</sup>, Jan Zeman<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Civil Engineering, CTU in Prague, liya.gaynutdinova@fsv.cvut.cz

<sup>2</sup> University of Freiburg

<sup>3</sup> Faculty of Civil Engineering, CTU in Prague

**Abstract** We present a numerical scheme for obtaining guaranteed (reliable) and arbitrarily close two sided bounds to effective (homogenized) parameters of the linear elasticity problem. For the upper bounds, we use standard finite element (FE) discretization of the so-called primal problem with preconditioning based on the fast discrete Fourier transformation (FFT). For the lower bounds, we use the dual formulation and some smoother FE approximation spaces. Moreover, instead of solving the discretized dual problem, we can only compute an  $L^2$ -orthogonal projection of an auxiliary field built from the primal solution. The projection can be computed easily by FFT and provides a lower bound of almost the same quality as that obtained as the exact solution of the discretized dual problem. In addition, a simple low-dimensional optimization improves the projected solution. Numerical examples are presented to support the theoretical developments.

# Numerická simulace cyklického zatěžování zrnitých materiálů

Judita Runczиковá \*, Jan Chleboun †

\* Katedra matematiky FSv ČVUT, judita.runczikova@fsv.cvut.cz

† Katedra matematiky FSv ČVUT, Jan.Chleboun@cvut.cz

**Abstrakt.** Příspěvek se zabývá problematikou matematického modelování hypoplasticity zrnitých materiálů. V úvodu je popsán použitý model, který je uvedený v článku [1] od E. Bauera a kol. a doplněný v článku [2].

Uvažována je zde úloha cyklického proporčního zatěžování a odtěžování odvodněného zrnitého materiálu za různých stavů (izotropní apod.), přičemž je očekáváno, že bude docházet k postupnému zhutňování materiálu, což je výsledně patrné zejména v grafech závislosti napětí na deformacích.

V nejjednodušším izotropním případě se jedná o počáteční úlohu pro nelineární explicitně zadanou obyčejnou diferenciální rovnici (ODR) prvního řádu, v obecnějším případě jde o nelineární implicitně zadanou soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Koeficienty vystupující v modelu jsou buď konstanty nebo předepsané funkce nebo mohou záviset na pórovitosti materiálu, tedy i na způsobené deformaci, která je v případě zde řešené stress-controlled simulace neznámou veličinou. Algoritmus jednotlivých variant úlohy je sestaven v softwaru Matlab.

**Poděkování.** Práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS23/092/OHK1/2T/11.

## Literatura:

- [1] Bauer E., Kovtunenکو V.A., Krejci P., Krenn N., Sivakova L., Zubkova A.V. *On proportional deformation paths in hypoplasticity*. Acta Mechanica 231, 2020, 1603-1619.
- [2] Bauer E., Kovtunenکو V.A., Krejčí, P., Monteiro G.A., Runczиковá J. *Stress-controlled ratchetting in hypoplasticity: a study of periodically proportional loading cycles*. Acta Mechanica 234, 2023, 4077–4093.









Editor	Stanislav Olivík
Název díla	Sborník abstraktů Studentské konference a Rektorysovy soutěže
Vydalo	České vysoké učení technické v Praze
Zpracovala	Fakulta stavební
Kontaktní adresa	Katedra matematiky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, Thákurova 7, Praha 6
Tel.	+420 22435 4390
Počet stran	30
Vydání	1.

Neprodejně.

Praha 2023