



Metodika zpracování fyzikálních měření

Ing. Petr Pokorný, ČVUT v Praze, Fakulta stavební, katedra fyziky, Skupina aplikované optiky
Thákurova 7, 166 29 Praha 6, petr.pokorny@fsv.cvut.cz

Obsah

Úvod	3
Obecný postup	4
Nejistoty měření a odhadnutých skutečných hodnot hledaných parametrů	5
Obecná charakteristika nejistot měření	5
Určení nejistot metodou typu A	5
Určení nejistot metodou typu B	6
Nejistota z rozlišení přístroje	6
Nejistota ze čtení analogového ručičkového přístroje	6
Nejistota ze čtení displeje digitálního přístroje	7
Zákon přenášení variancí, kombinovaná standardní nejistota (metoda typu C)	7
Příklad: Výpočet kombinované nejistoty odhadu skutečné (střední) hodnoty přímo měřené veličiny	8
Výpočet rozšířené nejistoty	9
Metody odhadu skutečných hodnot parametrů	11
Metoda nejmenších čtverců	11
Vážený průměr	15
Aritmetický průměr	15
Metoda postupných měření	16
Motivace k použití metody postupných měření	16
Metodika postupných měření	16
Obecné doporučení k prezentaci zpracování experimentálních měření	18
Shrnutí postupu experimentálního měření a analýzy nejistot	18
Shrnutí zpracování přímých měření	19

Shrnutí zpracování nepřímých měření	20
Shrnutí aproximace lineární závislosti procházející počátkem metodou nejmenších čtverců	21
Příklad zpracování měření v softwaru MATLAB	21
Doporučená literatura	26
Dodatek 1 – K jednotkové směrodatné odchylce	27
Dodatek 2 – K směrodatné odchylce	29

Úvod

Tento materiál vznikl v rámci laboratorních praktických cvičení předmětu 102FY1G na Fakultě stavební ČVUT v Praze. Práce si klade za cíl vytvoření stručného shrnutí základních postupů zpracování experimentálních fyzikálních měření. Studenti tak mají možnost velmi rychle a jednoznačně dohledat základní vztahy pro vypracování protokolů laboratorních měření.

V materiálu není záměrně z důvodu stručnosti zahrnut komplexní teoretický úvod a podrobná odvození základních matematických nástrojů, která mají možnost studenti nalézt a studovat z řady knih uvedených v doporučené literatuře v závěru práce. Odvození jsou prováděna jen v případech, kdy je to vhodné pro pochopení metod zpracování.

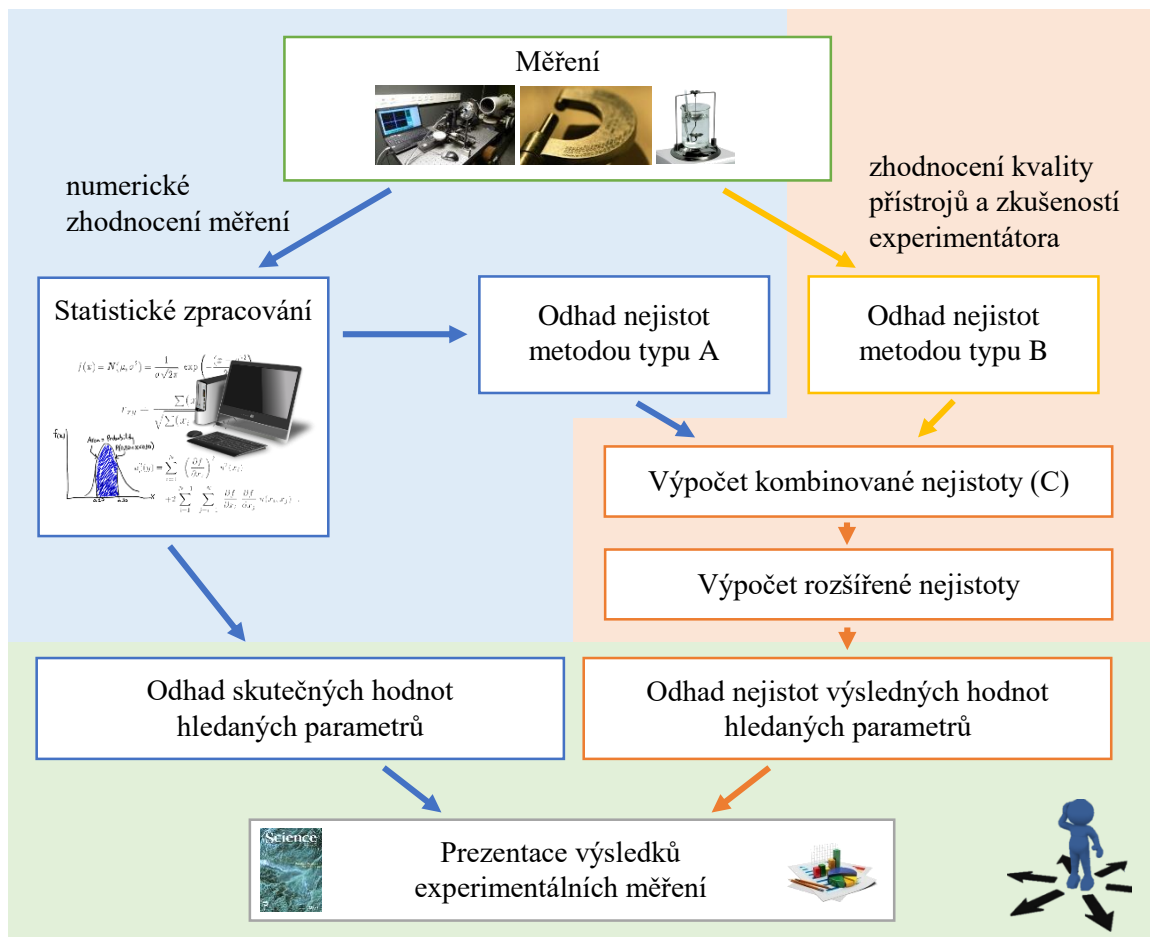
Metodika vychází z doporučení JCGM 100:2008 [1] zpracovaného Pracovní skupinou 1 Spojené komise pro metody v metrologii (Work group 1, Joint Committee for Guides in Metrology JCGM/WG 1).

V závěru práce je uveden příklad zpracování experimentálních dat v prostředí MATLAB. Studenti tak mají možnost čerpat ze zdrojového kódu vzorového řešení, a použít tento nástroj dále k řešení komplexnějších analýz experimentálních měření.

Petr Pokorný

Obecný postup

Obecně můžeme postup zpracování fyzikálních měření shrnout diagramem zobrazeným na obr. 1. Soubor měřených dat, ať už přímých nebo zprostředkujících veličin, je základním materiálem pro **statistické zpracování a numerické řešení**. Výstupem statistických analýz je odhad **skutečných hodnot hledaných parametrů**, a také **odhad charakteristik rozptylu** pravděpodobnostního rozdělení, které u jednotlivých měření předpokládáme, tj. numerické zhodnocení kvality měření neboli **určení nejistot metodou typu A**. V rámci objektivního posouzení metrologických měření je nutné zahrnout do odhadů nejistot také charakteristiky přesnosti použitých přístrojů nebo zkušenosti experimentátora, který může relevantně stanovit další vlivy působící na měření. Tento postup nazýváme **určení nejistot metodou typu B**. Tyto obě metody jsou poté kombinovány do výsledných odhadů nejistot měřených parametrů pomocí kombinované standardní nejistoty, neboli použití **metody typu C**. Výsledné nejistoty lze ještě rozšířit na vhodný **interval spolehlivosti**, a získáváme tak odhad **rozšířené nejistoty**. Zpracované výsledky jsou poté **vhodnou formou prezentovány** (protokol, konference, časopis).



Obr. 1 Postup zpracování fyzikálních měření

Nejistoty měření a odhadnutých skutečných hodnot hledaných parametrů

Tato metodika vychází z doporučení JCGM 100:2008 [1] zpracovaného Pracovní skupinou 1 Spojené komise pro metody v metrologii (Work group 1, Joint Committee for Guides in Metrology JCGM/WG 1). Cílem tohoto doporučení je sjednocení postupu analýzy nejistot a vytvoření univerzální metodiky, kde by metody byly aplikovatelné na většinu druhů měření a typů vstupních dat. Metody a numerické výsledky musí být **vnitřně konzistentní**, tj. musí odpovídat jednotlivým vlivům, které na výsledky působí, a také **přenositelné**, tj. určená nejistota výsledku měření by měla být použitelná v dalším zpracování.

Pro všechna následující tvrzení a odvození předpokládáme, že měřené veličiny **neobsahují hrubé ani systematické chyby** a mají **symetrické pravděpodobnostní rozdělení** [1-13], které reprezentuje hypotézu o elementárních chybách [3,5,9-12].

Obecná charakteristika nejistot měření

Doporučení JCGM 100:2008 [1] je založeno na Doporučení INC-1 (1980) [2], které splňuje výše zmíněné požadavky. Dle [2] můžeme experimentální nejistoty charakterizovat následovně:

1. Nejistoty výsledků měření se obvykle skládají z několika komponent, které mohou být organizovány do **dvou základních kategorií** vzhledem k tomu, jak jsou určeny jejich numerické hodnoty:
 - a. nejistoty určené **statistickými metodami**,
 - b. nejistoty určeny **jinými postupy**.Každý protokol určení nejistot by měl obsahovat podrobný popis specifikující metody a konkrétní hodnoty pro určení jejich velikostí.
2. Komponenty určené dle **kategorie A** bodu 1. jsou charakterizovány **odhady variancí** s_i^2 (případně odhady výběrových směrodatných odchylek s_i) pravděpodobnostních rozdělení, které u přímo měřených veličin předpokládáme, a také **počtem stupňů volnosti**. Kde je to nutné (závislá měření), měli by být uváděny kovariance mezi závislými parametry. Zmíněné odhady provádíme **statisticky**.
3. Komponenty určené dle **kategorie B** bodu 1. jsou charakterizovány odhady kvantit u_j^2 , které reprezentují odhady variancí předpokládaných pravděpodobnostních rozdělení určených **empiricky**. Kde je to nutné, měli by být opět uváděny kovariance mezi závislými parametry.
4. **Kombinovaná nejistota** by měla být charakterizována numerickými hodnotami získanými aplikací obvyklých metod pro kombinaci variancí (**zákon přenášení variancí**). Kombinovaná nejistota by měla být vyjádřena **ve formě standardních nejistot** (odhad směrodatné odchylky).
5. Je-li třeba násobit kombinovanou nejistotu koeficientem (**rozšířená nejistota**) k získání výsledné celkové nejistoty, **koeficient rozšíření musí být vždy uveden** v dokumentaci výpočtu.

Určení nejistot metodou typu A

Nejistoty určované metodou typu A (kategorie A viz předchozí kapitola) vychází z předpokladu, že námi měřená data jsou náhodnými veličinami [1,3-13], které mají určité pravděpodobnostní rozdělení. Základními charakteristikami pravděpodobnostního rozdělení jsou hustota pravděpodobnosti, střední hodnota a rozptyl (variance) [1,3-13]. **Nejistoty určené metodou typu A jsou odhady rozptylu pravděpodobnostního rozdělení**, které u námi měřených dat předpokládáme. K tomuto odhadu existují **statistické nástroje**, které využíváme. Nejistoty veličiny x určené metodou typu A značíme $u_A(x)$.

Jako příklad uveďme nejčastěji používaný **odhad výběrové směrodatné odchylky souboru přímo měřených dat**, u kterého předpokládáme normálního rozdělení [1,3-13]. Uvažujme, že odhad \bar{x} hledané veličiny je určen ze souboru měřených dat $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Poté výběrová směrodatná odchylka s_x (odmocnina z rozptylu) odpovídající danému pravděpodobnostnímu rozdělení bude dána vztahem [1,3-13]:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}, \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \quad (1)$$

Ve výše zmíněném případě tedy platí: $u_A(x) \approx s_x$.

Určení nejistot metodou typu B

Odhad nejistot určený metodou typu B využívá znalostí experimentátora, případně dostupných kalibračních protokolů, specifikací od výrobce, apod., k zahrnutí nejistot z odečítání stupnic a hodnot na displejích. Tyto nejistoty je třeba do výpočtů zahrnout, jelikož předchozí metoda typu A hodnotila výsledky numericky na základě statistických postupů, které obecně nepokrývají veškerou znalost o kvalitě použitých měřických pomůcek.

Obecně rozlišujeme tři základní druhy přístrojů, a tedy **tři základní postupy stanovení odhadu nejistoty metodou typu B**. Dle použitého přístroje tedy určíme nejistotu:

1. z **rozlišení přístroje**,
2. ze čtení analogového **ručičkového přístroje**,
3. ze čtení displeje **digitálního přístroje**.

Obecně je v rámci této metodiky k určení nejistoty tímto způsobem přístupováno tak, že se předpokládá případ, kdy měřená hodnota má **rovnoměrné pravděpodobnostní rozdělení** dané intervalem Δ , jehož velikost se určuje na základě použitého přístroje (1. – 3.) postupem zmíněným dále, kdy měřená hodnota leží uprostřed tohoto intervalu. **Nejistota určená metodou typu B pak odpovídá směrodatné odchylce daného rovnoměrného rozdělení**. Ze znalosti vlastností rovnoměrného rozdělení [1,3-13] poté pro nejistotu $u_B(x)$ určenou metodou typu B pro měřenou veličinu x můžeme psát:

$$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}. \quad (2)$$

Nejistota z rozlišení přístroje

Tento přístup používáme, nemáme-li k dispozici žádné informace o použitém analogovém příp. digitálním přístroji. Předpokládáme, že **odečtená hodnota se bude nacházet se stejnou pravděpodobností v intervalu daném \pm polovinou nejmenšího dílku stupnice** od námi odečtené hodnoty. Velikost intervalu Δ poté bude dána **velikostí nejmenšího dílku stupnice** případně velikostí nejmenší odečitatelné hodnoty na digitálním displeji.

Nejistota ze čtení analogového ručičkového přístroje

V případě použití analogového ručičkového přístroje využíváme, pokud je tak u přístroje uvedeno, tzv. **třídu přesnosti (TP)**. Hodnota TP je zpravidla uvedena u stupnice a udává **maximální relativní velikost chyby v procentech při výchylce ručičky do krajní polohy**. Obdobně jako v předchozím případě předpokládáme, že nejistota bude odpovídat směrodatné odchylce rovnoměrného pravděpodobnostního rozdělení, kde daný interval Δ bude vyjádřen jako:

$$\Delta = 2 \times (\text{rozsah stupnice}) \times \text{TP} / 100. \quad (3)$$

Nejistota určená metodou typu B pak bude vypočtena vztahem (2) s dosazenou hodnotou vypočtenou podle (3).

Nejistota ze čtení displeje digitálního přístroje

U digitálních přístrojů jsou nejistoty určovány zpravidla pomocí veličin p a n , které jsou deklarovány výrobcem a jsou k nalezení v technických specifikacích. Opět je pro nejistotu určenou metodou typu B předpokládáno rovnoměrné pravděpodobností rozdělení, kdy je daný interval Δ vyjádřen jako:

$$\Delta = 2 \times (p/100 \cdot x + n \text{ digit}), \quad (4)$$

kde p je v procentech, x je měřená hodnota, a n digit představuje n -násobek nejmenší možné odečitatelné hodnoty na displeji přístroje. Dosazením (4) do (2) poté dostáváme odhad nejistoty určený metodou typu B pro měření digitálním přístroje. V případě, že hodnoty p a n nejsou u daného přístroje k dispozici, použijeme metodu z rozlišení.

Zákon přenášení variací, kombinovaná standardní nejistota (metoda typu C)

Kombinovaná nejistota (metoda typu C) slouží k vyhodnocení nejistoty měřené veličiny, jestliže se na její hodnotě podílí několik dílčích měření, které má každou svojí známou (případně dříve odhadnutou) nejistotu. Jinak řečeno, je-li **výsledná hodnota funkcí více měřených veličin**, musíme přistoupit k určení kombinované nejistoty.

K výpočtu se používá tzv. **zákon přenášení variací** známý ze statistiky [1,10,12,13]. V rámci této metodiky nebudeme diskutovat teoretické odvození, které čtenář může nalézt v dostupné literatuře, ale uvedeme pouze výsledný vztah.

Předpokládejme, že výsledné hodnoty dané vektorem $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$ (vektor výsledných hodnot) jsou závislé na měřeních $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ (vektor měření). Je-li dále možné vyjádřit závislost přírůstku vektoru $d\mathbf{y}$ na přírůstku $d\mathbf{x}$ pomocí totálního diferenciálu [6,7] s dostatečnou přesností, čili platí:

$$d\mathbf{y} = \mathbf{A}d\mathbf{x}, \quad (5)$$

kde \mathbf{A} je Jakobiho matice (matice parciálních derivací vektoru \mathbf{y} podle \mathbf{x}) [6,7]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial y_1 / \partial x_1 & \partial y_1 / \partial x_2 & \cdots & \partial y_1 / \partial x_N \\ \partial y_2 / \partial x_1 & \partial y_2 / \partial x_2 & \cdots & \partial y_2 / \partial x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial y_M / \partial x_1 & \partial y_M / \partial x_2 & \cdots & \partial y_M / \partial x_N \end{bmatrix}, \quad (6)$$

a jsou-li pro jednotlivé veličiny vektoru \mathbf{x} jsou známy odhady variací $s_{i,i}^2$ a kovariací $s_{i,j}^2$, čili můžeme sestavit tzv. kovarianční matici $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ [1,10,12,13]:

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} s_{1,1}^2 & s_{1,2}^2 & \cdots & s_{1,N}^2 \\ s_{2,1}^2 & s_{2,2}^2 & \cdots & s_{2,N}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N,1}^2 & s_{N,2}^2 & \cdots & s_{N,N}^2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

poté platí zákon přenášení variací pro odhad kovarianční matice $\mathbf{S}(\mathbf{y})$ [1,10,12,13]:

$$\mathbf{S}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{A}^T. \quad (8)$$

Připomeňme, že kovariance vyjadřují vzájemnou závislost mezi dvěma náhodnými veličinami, jak je známo ze statistiky [9-13]. Jsou-li nulové, veličiny jsou nezávislé. Z toho plyne, že diagonální kovarianční matice (s nulovými prvky mimo diagonálu) charakterizuje nezávislé veličiny, kde jejich směrodatné odchylky (nebo odhady směrodatných odchylek) jsou dány jako odmocniny z diagonálních prvků.

Ve většině fyzikálních měření můžeme měřené veličiny, které se podílejí na výsledné hodnotě, považovat za nezávislé, a tedy vztah (8) se výrazně zjednoduší. Vyjádřeme si nyní základní vztah pro určení jedné veličiny y (kovarianční matice na levé straně (8) přejde v rozměr 1×1 , čili bude to variance $s^2(y)$ veličiny y), která je závislá na měřeních $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, čili předpokládáme obecný model $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Úpravou (8) pro nezávislá měření (prvky mimo diagonálu matice $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ jsou nulové) poté dostáváme pro **odhad nejistoty** $s(y)$ veličiny y **zákon přenášení variací pro nezávislé proměnné**¹:

$$s(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 s^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 s^2(x_2) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)^2 s^2(x_N)}. \quad (9)$$

Hodnotu $s(y)$ určenou podle vztahu (9) nazveme odhadem **kombinované nejistoty měření metodou typu C** a značíme jí kvůli návaznosti na předchozí značení $u_C(y)$.

Kombinovaná nejistota slouží nejen k určení vlivu více proměnných na výsledek měření, ale používáme ji k výpočtu **souhrnného vlivu nejistot určených metodami typu A a B**.

Předpokládejme, že vypočtená veličina y statistickým postupem obsahuje dvě složky, které nejistoty určené metodami A a B reprezentují, a to složku x_1 určenou statistickým vyhodnocením a složku x_2 , která vystihuje nepřesnost v odečtení pomůcky. Složka x_1 poté bude mít nejistotu $u_A(x_1)$ a složka x_2 nejistotu $u_B(x_2)$. Obě dvě složky jsou na sobě nezávislé. Kombinovanou nejistotu výsledné veličiny $u_C(y)$ poté pomocí vztahu (9) určíme jako:

$$u_C(y) = \sqrt{u_A^2(x_1) + u_B^2(x_2)}. \quad (10)$$

Můžeme tedy vyslovit tvrzení: **Kombinovaná nejistota přímo měřené veličiny je dána kvadratickým součtem nejistot tohoto měření určených metodami typu A a B**.

Úvodní část této kapitoly můžeme poté shrnout jako: **Kombinovanou nejistotu vypočtené veličiny, která je popsána funkcí několika na sobě nezávislých měření, určujeme pomocí zákona přenášení variací pro nezávislá měření, který je popsán vztahem (9). Pro vzájemně závislá měření využijeme obecný vztah (8).**

Příklad: Výpočet kombinované nejistoty odhadu skutečné (střední) hodnoty přímo měřené veličiny
Pro doplnění uvažujme příklad určení kombinované nejistoty střední hodnoty přímo měřené veličiny. Jak bylo ukázáno v kapitole určení nejistoty metodou typu A, předpokládáme odhad střední hodnoty \bar{x} hledané veličiny x a její nejistoty metodou A určenou ze souboru měřených dat $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ (opakované měření stejné fyzikální veličiny) pomocí vztahů:

¹ V odvození vycházíme ze vztahu (5), který nemusí obecně vždy platit, tedy totální diferenciál nevyjádří dostatečně změnu v závislosti na změně proměnných. V takovém případě je nutné vzít v úvahu např. další členy Taylorova rozvoje [6,7] a výsledné vztahy patřičně modifikovat, viz např. [1].

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \quad u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}. \quad (11)$$

Nejistota $u_A(x)$ je odhadem směrodatné odchylky pravděpodobnostního rozdělení, které pro veličinu x předpokládáme. Dále musíme uvážit nejistotu způsobenou vlivy zmíněnými v kapitole pro metodu B, čili každé měření x_i bude mít nejistotu $u_B(x)$. Kombinovaná nejistota $u_C(x)$ každého měření poté bude dána vztahem:

$$u_C(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)}. \quad (12)$$

Pro určení výsledné nejistoty $u_C(\bar{x})$ odhadu střední hodnoty \bar{x} poté použitím zákona přenášení variancí postupně dostáváme (předpokládáme vzájemně nezávislá měření hodnot x_i):

$$u_C(\bar{x}) = \sqrt{\frac{u_A^2(x) + u_B^2(x)}{N}}, \quad (13)$$

protože platí $(\partial\bar{x} / \partial x_i) = 1/N$, a tedy:

$$u_C^2(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x_i} \right)^2 u_C^2(x) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \right)^2 u_C^2(x) = \frac{N}{N^2} u_C^2(x) = \frac{u_A^2(x) + u_B^2(x)}{N}.$$

Výpočet rozšířené nejistoty

Jak bylo uvedeno v předchozích částích, výpočet nejistot měření je prováděn pomocí **odhadu směrodatných odchylek** pravděpodobnostního rozdělení, které pro naše měření (náhodnou veličinu) předpokládáme. Zpravidla je předpokládáno **normální rozdělení pravděpodobnosti** (symetrické kolem střední hodnoty). Hodnota směrodatné odchylky normálního rozdělení definuje hranici symetricky umístěnou kolem střední hodnoty μ náhodné veličiny x , uvnitř které bude ležet přibližně **68 %** populace.

Bude-li laboratorní experiment mít dostatečný počet nadbytečných měření s přibližně normálním rozdělením pravděpodobnosti, poté můžeme využít zmíněné vlastnosti směrodatné odchylky a tvrdit, že skutečná hodnota x_s námi měřené veličiny x bude ležet v intervalu, jehož velikost je dána dvojnásobkem odhadu směrodatné odchylky (nejistoty metodou typu C), se středem v odhadu \bar{x} skutečné hodnoty s pravděpodobností 68 %. Tento interval nazveme **68%ní interval spolehlivosti**. Schematicky zapsáno:

$$(\bar{x} - u_C) \leq x_s \leq (\bar{x} + u_C). \quad (14)$$

Je-li to třeba v některých případech, tento interval můžeme rozšířit násobením vhodným **koeficientem rozšíření** k , který lze vypočítat pomocí inverze k tzv. chybové funkci [3,9-13]. Chybová funkce popisuje pravděpodobnost, se kterou je náhodná veličina v intervalu:

$$(\mu - k\sigma \leq x \leq \mu + k\sigma) \quad k > 0, k \in \mathfrak{R}, \quad (15)$$

kde μ je střední hodnota pravděpodobnostního rozdělení a σ je jeho směrodatná odchylka. Hodnoty pravděpodobnosti normálního rozdělení pro vybrané parametry k ukazuje tab. 1.

Tabulka 1 Koefficienty rozšíření v závislosti na pravděpodobnosti pro normální pravděpodobnostní rozdělení

k	0,674	1,000	1,960	2,000	2,576	3,000
P	0,500	0,683	0,950	0,955	0,990	0,997

Pro zpracování fyzikálních měření se využívají zpravidla 95%ní nebo 99%ní intervaly spolehlivosti, tedy je nutné vypočtené odhady nejistot metodou typu C násobit koeficienty 1,960 nebo 2,576.

Rozšířenou nejistotu poté značíme $U \equiv ku_C$, a tedy skutečná hodnota bude ležet v intervalu:

$$\begin{aligned}(\bar{x} - U) &\leq x_s \leq (\bar{x} + U), \\(\bar{x} - ku_C) &\leq x_s \leq (\bar{x} + ku_C).\end{aligned}\tag{16}$$

Rozšířená nejistota nepřináší žádnou novou informaci o kvalitě našich měření. Říká pouze, jaký interval spolehlivosti vyjadřují hodnoty uvedené v prezentovaných výsledcích. **Je proto nutné uvádět, jaké hodnoty jsou ve výsledcích uvedeny, resp. jakému intervalu spolehlivosti uváděné nejistoty odpovídají.**

Metody odhadu skutečných hodnot parametrů

V této části se budeme stručně zajímat postupem zpracování fyzikálních měření a odhadem skutečných hodnot hledaných parametrů. Je volen postup od nejobecnějšího ke speciálnímu, tj. nejprve se zabýváme **metodou nejmenších čtverců**, a následně jejími speciálními případy – **váženým a aritmetickým průměrem**. V závěru této části práce je představena **metoda postupných měření**, která dovoluje objektivně využít všechna po sobě následující (závislá) měření. U každé metody je uveden odhad nejistot, který je zpravidla důsledkem zákona přenášení variancí, a tedy zohledňuje nejistoty vstupujících veličin.

Pro všechna následující tvrzení a odvození předpokládejme, že měřené veličiny **neobsahují hrubé ani systematické chyby** a mají symetrické **normální pravděpodobnostní rozdělení** [1-13], které reprezentuje hypotézu o elementárních chybách [3,5,9-12].

Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je základní metodou pro zpracování fyzikálních experimentálních měření. Základní myšlenkou je **minimalizace součtu čtverců (vážených) odchylek původních a aproximovaných hodnot**. Podrobnosti k odvození a teoretickým diskuzím nalezne čtenář v řadě zdrojů uvedených v doporučené literatuře.

Předpokládejme, že model popisující naše měření lze zapsat jako lineární kombinaci hledaných parametrů:

$$f_1(\mathbf{x})q_1 + f_2(\mathbf{x})q_2 + \dots + f_M(\mathbf{x})q_M = l(\mathbf{y}), \quad (17)$$

kde funkce $f_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, \dots, M$) a $l(\mathbf{y})$ popisují fyzikální model měřeného problému, \mathbf{x} a \mathbf{y} jsou obecně vektory, jejichž hodnoty určujeme zprostředkujícím měřením a q_j ($j = 1, \dots, M$) jsou námi hledané parametry. Jsme-li schopni pomocí laboratorních měření sestavit N rovnic (17) (např. opakováním měření apod.), poté můžeme model psát jako soustavu rovnic v maticové formě:

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{l}, \quad (18)$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{1,1}(\mathbf{x}) & f_{1,2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{1,M}(\mathbf{x}) \\ f_{2,1}(\mathbf{x}) & f_{2,2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{2,M}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{N,1}(\mathbf{x}) & f_{N,2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{N,M}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1(\mathbf{y}) \\ l_2(\mathbf{y}) \\ \vdots \\ l_N(\mathbf{y}) \end{bmatrix}.$$

Metoda nejmenších čtverců ze své podstaty minimalizuje výraz:

$$\chi^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (19)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{q} - \mathbf{l}$ je vektor odchylek levé a pravé strany soustavy (18) a $\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_N)$ je diagonální matice vah², pro které platí: $p_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$ ($i = 1, \dots, N$), kde σ_0 je apriorní jednotková směrodatná odchylka pravděpodobnostního rozdělení (obecně jí můžeme volit, nemá totiž vliv na výsledky vyrovnání parametrů ani odhad jejich nejistot – viz Dodatek 1, pouze může podpořit numerickou stabilitu

² Tento tvar matice vah je volen, nejsou-li jednotlivá měření závislá. Jsou-li vstupní veličiny závislé, je třeba znát kovarianční matici vyjadřující danou závislost, poté bude **váhová matice rovna inverzní matici k dané matici kovarianční**. Více může student nalézt v doporučené literatuře, např. [10,12,13].

výpočtu), σ_i je směrodatná odchylka i -tého členu vektoru \mathbf{l} . Vhodné je tedy volit $\sigma_0 = \sigma_i$, kde σ_i je směrodatná odchylka libovolného měření, váha poté bude jednotková. Pro určení vah lze použít i odhady nejistot jednotlivých měření (nejistoty jsou odhady směrodatných odchylek). Minimum rovnice (19) najdeme pomocí podmínky pro extrém, platí:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} [(\mathbf{A}\mathbf{q} - \mathbf{l})^T \mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{q} - \mathbf{l})] = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{q} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = 0. \quad (20)$$

Poté ihned dostáváme pro vektor $\bar{\mathbf{q}}$ odhadu parametrů známý vztah:

$$\bar{\mathbf{q}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}. \quad (21)$$

Zabývejme se nyní **odhadem nejistot vypočtených odhadnutých parametrů**. Ze statistické teorie [10,12,13] můžeme ukázat, že pro vektor $\mathbf{s}(\bar{\mathbf{q}})$ nejistot parametrů $\bar{\mathbf{q}}$ platí:

$$\mathbf{s}(\bar{\mathbf{q}}) = \text{diag} \left\{ \sqrt{\mathbf{S}_{\bar{\mathbf{q}}}} \right\}, \quad (22)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{q}}) &= \bar{s}_0^2 \mathbf{C} = \bar{s}_0^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}, \\ \bar{s}_0^2 &= \frac{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{P} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}{N - M} = \frac{(\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{l})^T \mathbf{P}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{l})}{N - M}. \end{aligned}$$

Vztah pro výpočet kovarianční matice $\mathbf{S}(\bar{\mathbf{q}})$ je **důsledkem zákona přenášení variací** (8), jak lze z teorie ukázat [10,12,13]. A tedy určíme-li nejistoty vstupních parametrů do výpočtu, a tím pádem váhovou matici \mathbf{P} , **vypočtené odhady parametrů a jejich nejistot zahrnují vlivy nejistot jednotlivých vstupních veličin**.³

Jinými slovy odhad nejistot vypočtených parametrů je dán odmocninou z diagonálních prvků kovarianční matice $\mathbf{S}(\bar{\mathbf{q}})$, kde $\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ je tzv. matice kofaktorů (charakterizuje závislost mezi jednotlivými vypočtenými parametry) a \bar{s}_0 je aposteriorní odhad jednotkové směrodatné odchylky.

Je-li třeba určit aposteriorní odhad nejistot měřených veličin (např. neznáme-li váhy před vyrovnáním, tedy volíme všechny jednotkové, a chceme je aposteriorně určit), použijeme vztah daný zákonem přenášení variací (8):

$$\mathbf{S}(\mathbf{l}) = \mathbf{A} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{A}^T. \quad (23)$$

Nejistoty měřených parametrů poté budou opět dány odmocninou z diagonálních prvků matice (20).

Výše uvedený maticový zápis je velmi univerzální a lze ho použít na řadu praktických situací, jsme-li schopni formulovat model (17). Ukažme si nyní ještě jiný často prezentovaný způsob výpočtu odhadu parametrů metodou nejmenších čtverců, a to konkrétně na **výpočtu koeficientů regresní přímky** (aproximace měřených dat přímkou). Princip je naprosto stejný jako v předcházejícím případě, ovšem místo maticové formu využijeme zápis sumy. Čtenář si snadno ověří, že se jedná opravdu o identický problém.

³ To, že odhady nejistot vypočtených parametrů metodou nejmenších čtverců jsou důsledkem zákona přenášení variací, je důležitý fakt, zahrnujeme-li do výpočtů vstupních nejistot odhady metodou B. Dle Doporučení [1] nesmí totiž dojít ke "zdvojování" nejistot B. Jinými slovy, odhad nejistot metodou B použijeme pouze na přímo měřené veličiny, resp. kombinujeme ho pouze s odhadem rozptylu pravděpodobnostního rozdělení přímo měřených hodnot. Správný postup byl ukázán v příkladu v předchozí kapitole. Výsledné nejistoty určené dle rovnice (22) poté považujeme za konečné.

Uvažujme lineární závislost danou vztahem:

$$y_i = ax_i + b, \quad i = 1, \dots, N. \quad (24)$$

Srovnáním s (17) vidíme, že se jedná o případ, kdy $f_{i,1}(\mathbf{x}) = x_i$, $f_{i,2}(\mathbf{x}) = 1$, $q_1 = a$, $q_2 = b$ a $l_i(\mathbf{y}) = y_i$. Podmínku (19) metody nejmenších čtverců poté můžeme psát jako:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N p_i (y_i - ax_i - b)^2 = \min. \quad (25)$$

Z podmínky pro extrém poté dostáváme (derivace podle parametrů musí být nulová):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^N p_i x_i (y_i - ax_i - b) = -2 \sum_{i=1}^N p_i x_i y_i + 2a \sum_{i=1}^N p_i x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^N p_i x_i = 0, \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^N p_i (y_i - ax_i - b) = -2 \sum_{i=1}^N p_i y_i + 2a \sum_{i=1}^N p_i x_i + 2b \sum_{i=1}^N p_i = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Následnou úpravou (26) dostáváme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé:

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^N p_i x_i^2 + b \sum_{i=1}^N p_i x_i &= \sum_{i=1}^N p_i x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^N p_i x_i + b \sum_{i=1}^N p_i &= \sum_{i=1}^N p_i y_i. \end{aligned} \quad (27)$$

Jejím řešením dostáváme vztahy pro výpočet koeficientů lineární regrese (aproximace přímkou):

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{\sum_{i=1}^N p_i x_i y_i \sum_{i=1}^N p_i - \sum_{i=1}^N p_i y_i \sum_{i=1}^N p_i x_i}{\sum_{i=1}^N p_i \sum_{i=1}^N p_i x_i^2 - \sum_{i=1}^N p_i x_i \sum_{i=1}^N p_i x_i}, \\ \bar{b} &= \frac{\sum_{i=1}^N p_i x_i^2 \sum_{i=1}^N p_i y_i - \sum_{i=1}^N p_i x_i \sum_{i=1}^N p_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^N p_i \sum_{i=1}^N p_i x_i^2 - \sum_{i=1}^N p_i x_i \sum_{i=1}^N p_i x_i}. \end{aligned} \quad (28)$$

V případě stejných vah ($p_i = 1 \quad \forall i$) se vztahy (28) výrazně zjednoduší, platí:

$$\bar{a} = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i}, \quad \bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i}. \quad (29)$$

Pro odhad nejistoty koeficientů daných rovnicemi (28) dostáváme úpravou maticových vztahů (22) následující výrazy:

$$\bar{s}_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i (\bar{a}x_i + \bar{b} - y_i)^2}{N-2}},$$

$$s(\bar{a}) = \bar{s}_0 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i}{\sum_{i=1}^N p_i \sum_{i=1}^N p_i x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^N p_i x_i \right]^2}}, \quad s(\bar{b}) = \bar{s}_0 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i x_i^2}{\sum_{i=1}^N p_i \sum_{i=1}^N p_i x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^N p_i x_i \right]^2}}. \quad (30)$$

Pro případ stejných vah ($p_i = 1 \quad \forall i$) poté platí:

$$\bar{s}_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{a}x_i + \bar{b} - y_i)^2}{N-2}}, \quad s(\bar{a}) = \bar{s}_0 \sqrt{\frac{N}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^N x_i \right]^2}}, \quad s(\bar{b}) = \bar{s}_0 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^N x_i \right]^2}}. \quad (31)$$

Zabývejme se nyní **aproximací přímkou, která prochází počátkem**. Situace bude dána modelem:

$$y_i = ax_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (32)$$

Obdobným způsobem dostáváme z podmínky metody nejmenších čtverců následující vztah:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N p_i x_i (y_i - ax_i) = -2 \sum_{i=1}^N p_i x_i y_i + 2a \sum_{i=1}^N p_i x_i^2 = 0. \quad (33)$$

Ze vztahu (33) poté ihned dostáváme pro odhad směrnice přímky procházející počátkem následující vztah:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^N p_i x_i^2}. \quad (34)$$

Nejistota vypočteného parametru bude dána obdobně jako v předchozím případě vztahem:

$$s(\bar{a}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i (\bar{a}x_i - y_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N p_i x_i^2}}. \quad (35)$$

V případě měření stejných vah poté platí:

$$s(\bar{a}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{a}x_i - y_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N x_i^2}}. \quad (36)$$

Jak již bylo řešeno, metodu nejmenších čtverců můžeme aplikovat na široké spektrum fyzikálních modelů. Řada problémů lze také z **původně nelineárního tvaru převést elementárními úpravami na lineární**

(linearizovat), případně využít např. Taylorovu řadu [7,8], a poté můžeme aplikovat výše uvedené vztahy na odhad parametrů modelu. V následující části si ukážeme, že **vážený a aritmetický průměr jsou speciálními případy metody nejmenších čtverců**.

Vážený průměr

Vážený průměr můžeme formulovat jako výpočet odhadu skutečné hodnoty přímého měření, resp. model (17) bude dán funkcemi $f_{i,1}(\mathbf{x}) = 1$ a $l_i(\mathbf{y}) = y_i$. Jinými slovy měříme N -krát velikost stejné fyzikální veličiny y a chceme určit její nejpravděpodobnější hodnotu. S pomocí výše uvedeného obecného popisu metody nejmenších čtverců bude tuto hodnotu reprezentovat vypočtený parametr \bar{q}_1 . Užitím (17) dostáváme:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = q_1, \quad \mathbf{l} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_N), \quad p_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2 \quad (i = 1, \dots, N). \quad (37)$$

Po dosazení do (21) a po úpravě dostáváme známý vztah pro **vážený průměr**:

$$\bar{q}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N p_i y_i}{\sum_{i=1}^N p_i}. \quad (38)$$

Nejistotu výsledného váženého průměru můžeme vyjádřit pomocí vztahů (22) jako:

$$s(\bar{q}_1) = \frac{\bar{s}_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^N p_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i (\bar{q}_1 - y_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N p_i}}, \quad (39)$$

kde aposteriorně určený odhad jednotkové směrodatné odchytky \bar{s}_0 vyjadřuje odhad směrodatné odchytky daného pravděpodobnostního rozdělení (normálního rozdělení pravděpodobnosti).

Aritmetický průměr

Aritmetický průměr je speciálním případem váženého průměru (čili i metody nejmenších čtverců), kdy jsou všechny váhy rovny ($p_i = 1 \quad \forall i$). Po dosazení tohoto předpokladu do (38) a (39) ihned můžeme psát známé vztahy:

$$\bar{q}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}, \quad s(\bar{q}_1) = \frac{\bar{s}_0}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{q}_1 - y_i)^2}{N(N-1)}}, \quad (40)$$

kde aposteriorně určený odhad jednotkové směrodatné odchytky \bar{s}_0 vyjadřuje odhad směrodatné odchytky daného pravděpodobnostního rozdělení (normálního rozdělení pravděpodobnosti).

Moudrý čtenář si může všimnout, že tak notoricky známou věc jako aritmetický průměr lze na první pohled netriviálně odvodit z předpokladů metody nejmenších čtverců. Na studenty tak mají kantoři možnost útočit zadáními typu: "Diskutujte metodu odhadu skutečných hodnot fyzikálního modelu vyrovnáním měření

přímých stejné váhy," což je poměrně účinné pro zastrašení při příchodu k ústní zkoušce. K obhajobě výše popsaného postupu ovšem musíme dodat, že je tak ukázána příjemná vlastnost aritmetického průměru, která minimalizuje čtverce odchylek měření od odhadu skutečné hodnoty. To je poměrně snadno představitelné, a tento elementární matematický aparát je tak zasazen do reálného kontextu. Také jsme tímto způsobem získali nástroj k odhadu nejistoty výsledné hodnoty průměru.

Metoda postupných měření

Metoda postupných měření [3-5] je nástrojem k odhadu skutečné hodnoty veličiny, které opakovaně měříme v řetězové návaznosti, např. při opakovaném měření periody harmonického děje, kdy zaznamenáváme postupně jednotlivé časy odečtu na stopkách a snažíme se určit periody z rozdílu dílčích měření.

Motivace k použití metody postupných měření

Předpokládejme, že chceme změřit periody harmonického děje (např. kývání matematického kyvadla) takovým způsobem, že stopky spustíme pouze na počátku, když je kyvadlo v nulové poloze, a řetězově odečítáme jednotlivé hodnoty času při každém průchodu touto polohou.

Naměříme tak sadu dat $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$. Intuitivní postup by byl odečíst vždy po sobě následující hodnoty a výsledek určit jako průměr z takto získaných rozdílů. Zapišeme-li tuto metodu matematicky, dostáváme:

$$\bar{T} = \frac{(t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + \dots + (t_N - t_{N-1})}{N - 1} = \frac{t_N - t_1}{N - 1}. \quad (41)$$

Jak je patrné, všechna měření t_2 až t_{N-1} se použitím výše uvedeného postupu vzájemně odečetla, čili výsledná hodnota periody vůbec nerespektuje tyto hodnoty, a tedy jejich měření probíhalo zbytečně. Metoda postupných měření je navržena tak, aby využila veškerá tato měření.

Metodika postupných měření

Pro metodu postupných měření je třeba změřit **sudý počet hodnot**. Jako příklad volme měření hodnot: $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_N\}$ ($k = N/2$), kde N je sudé. Zpracování poté bude následující:

1. Měřená data **rozdělíme na dvě poloviny** a zapišeme ideálně do tabulky do dvou sloupců (viz první dva sloupce tab. 1).
2. Z každé dvojice i -tého a $(k+i)$ -tého měření určíme rozdíl $\Delta_i = x_{k+i} - x_i$ (viz třetí sloupec tab. 1).
3. Pro každý rozdíl měření vypočteme "přírůstek ze dvou měření" vydělením rozdílů hodnot z bodu 2 počtem dvojic k , $\Delta x_i = \Delta_i / k$ (viz čtvrtý sloupec tab. 1).

Tabulka 2 Metoda postupných měření

Měření $i = 1 - k$	Měření $i = (k+1) - N$	Rozdíl měření $(k+i)$ a i	Přírůstek ze dvou měření	Nejlepší odhad přírůstku
x_1	x_{k+1}	$\Delta_1 = x_{k+1} - x_1$	$\Delta x_1 = \Delta_1 / k$	$\bar{\Delta x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \Delta x_i$
x_2	x_{k+2}	$\Delta_2 = x_{k+2} - x_2$	$\Delta x_2 = \Delta_2 / k$	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
x_k	x_N	$\Delta_k = x_N - x_k$	$\Delta x_N = \Delta_N / k$	

4. Vypočteme nejlepší odhad přírůstku jako aritmetický průměr hodnot z bodu 3, $\overline{\Delta x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \Delta x_i$ (viz poslední sloupec tab. 1).

Zabývejme se nyní **odhadem nejistoty hodnoty určené metodou postupných měření**. Uvažujme, že každá z měřených veličin x_i bude charakterizována nejistotou typu B, $u_B(x_i)$. Použitím **zákona přenášení variancí** určíme nejprve vliv nejistot určených metodou typu B na rozdíl Δ_i jako $u_B(\Delta_i) = \sqrt{2}u_B(x_i)$. Pro přírůstek ze dvou měření Δx_i poté $u_B(\Delta x_i) = u_B(\Delta_i)/k = \sqrt{2}u_B(x_i)/k$. Vzhledem k výše zmíněné metodice můžeme pro odhad kombinované nejistoty $u_C(\overline{\Delta x})$ výsledné hodnoty $\overline{\Delta x}$ použít modifikaci určení nejistoty aritmetického průměru, resp. postupu uvedeného v příkladu vztahy (11) až (13).

Odhad nejistoty metodou typu A pro přírůstek ze dvou měření Δx_i bude dán odhadem výběrové směrodatné odchylky, a tedy platí

$$u_A(\Delta x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (\Delta x_i - \overline{\Delta x})^2}{k-1}}. \quad (42)$$

Kombinovanou nejistotu výsledné hodnoty nejlepšího odhadu přírůstku poté dostaneme jako:

$$\begin{aligned} u_C(\overline{\Delta x}) &= \sqrt{\frac{u_A^2(\Delta x_i) + u_B^2(\Delta x_i)}{k}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (\Delta x_i - \overline{\Delta x})^2}{k(k-1)} + \frac{2u_B^2(x_i)}{k^3}} \\ &= \sqrt{\frac{16}{N^3(N-2)} \sum_{i=1}^{N/2} \left(x_{N/2+i} - x_i - \frac{N}{2} \overline{\Delta x} \right)^2 + \frac{16u_B^2(x_i)}{N^3}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Obecné doporučení k prezentaci zpracování experimentálních měření

Při prezentaci zpracování experimentálních měření platí obecné pravidlo **lépe více než méně** [1]. Tvořené dokumenty by měly být sestavovány tak, aby vždy bylo možné reprodukovat výpočty. Při tvorbě výstupů by měly být dodrženy následující obecné body [1]:

1. jasně popište metody použité k výpočtu výsledků měření a jejich nejistot z experimentálních pozorování a vstupních dat,
2. uveďte seznam všech komponentů nejistot a jednoznačně a kompletně popište, jak byly odhady nejistot vypočteny,
3. prezentujte analýzu dat takovým způsobem, že každý z důležitých kroků zpracování může být ihned reprodukován a využit k dalším analýzám, bude-li to třeba,
4. uveďte všechny redukce, opravy a konstanty použité ve výpočtech, společně s odůvodněním jejich použití.

Shrnutí postupu experimentálního měření a analýzy nejistot

Shrnutí postupu experimentálního měření prezentováno v této metodice a v doporučení [1] může být sestaveno do následujících bodů:

1. Sestavte matematický vztah (model) mezi výslednou hodnotou y a vstupní sadou měřených dat $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, čili vyjádřete obecný model $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Model by měl obsahovat všechny parametry i s korekcemi, které výrazným způsobem ovlivní výsledek a hodnotu nejistoty.
2. Odhadněte skutečné hodnoty měřených veličin $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N\}$ pomocí vhodných statistických nástrojů.
3. Odhadněte kombinované nejistoty měřených veličin pomocí výše popsaných metod.
4. Jsou-li vstupní veličiny vzájemně závislé, odhadněte kovariance.
5. Určete nejpravděpodobnější hodnotu $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$ s pomocí odhadů skutečných hodnot měřených veličin $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N\}$.
6. Pomocí zákona přenášení variací odhadněte kombinovanou nejistotu $u_C(\bar{y})$ výsledné hodnoty \bar{y} .
7. Je-li to nezbytné, určete rozšířenou nejistotu $U_{\alpha\%}(\bar{y}) = k_{\alpha\%} u_C(\bar{y})$ pro vhodný $\alpha\%$ interval spolehlivosti násobením vhodným koeficientem $k_{\alpha\%}$.
8. Prezentujte vhodným způsobem výsledky zpracování s odhady nejistot.

Shrnutí zpracování přímých měření

Předpokládejme, že je N -krát měřena jedna fyzikální veličina (teplota vody, rozměr tělesa, apod.) Je tedy měřena sada $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Shrňme-li předchozí kapitoly, zpracování bude probíhat následovně.

Krok	Vztahy
1. Odhad skutečné hodnoty měřené veličiny	Aritmetický průměr: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} .$
2. Odhad nejistoty určený metodou typu A	Odhad směrodatné odchylky pravděpodobnostního rozdělení pomocí výběrové směrodatné odchylky: $u_A(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} .$
3. Odhad nejistoty metodou typu B	$u_B(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} ,$ <p>kde Δ určíme v závislosti na použité měřické pomůcce:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rozlišení přístroje: Δ odpovídá nejmenšímu dílku stupnice nebo nejmenšímu možnému čtení digitálního displeje - analogový ručičkový přístroj: $\Delta = 2 \times (\text{rozsah stupnice}) \times \text{TP} / 100$ - digitální přístroj: $\Delta = 2 \times (p / 100 \cdot x + n \text{ digit})$
4. Výpočet kombinované nejistoty výsledné hodnoty (metodou typu C)	$u_C(\bar{x}) = \sqrt{\frac{u_A^2(x) + u_B^2(x)}{N}}$
5. Výpočet rozšířené nejistoty	$U(x) = k u_C(\bar{x}) ,$ <p>kde $k = 1,96$ pro 95%ní interval spolehlivosti, nebo $k = 2,576$ pro 99%ní interval spolehlivosti</p>
6. Prezentace výsledků (zpravidla na 1 až 2 platné cifry)	$x = (\bar{x} \pm U(x)) \text{ a.u.}, k = nnn ,$ <p>kde a.u. značí jednotky měřené veličiny, nnn je hodnota koeficientu rozšíření. V popisu nezapomeneme připomenou, jaký interval spolehlivosti byl pro výsledné hodnoty volen (byla-li počítána rozšířená nejistota).</p>

Shrnutí zpracování nepřímých měření

Předpokládejme, že je přímo měřeno několik dílčích nezávislých veličin $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, ze kterých je poté počítána výsledná hodnota $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Postup zpracování bude následující:

Krok	Vztahy
1. Odhad skutečných hodnot a kombinovaných nejistot přímo měřených veličin $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$	<p>Každá z přímo měřených dílčích veličin je zpravidla měřena opakovaně, čili pro každou z nich je třeba opakovat postup uvedený v předchozí kapitole v bodech 1. – 4. (bez výpočtu rozšířené nejistoty).</p> <p>Získáme tak sadu zpracovaných dat $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N\}$ s nejistotami $\{u_c(x_1), u_c(x_2), \dots, u_c(x_N)\}$.</p> <p>Pokud není měření opakováno, tento krok vynecháme, a jako nejistoty použijeme pouze hodnoty určené metodou typu B.</p>
2. Výpočet nejpravděpodobnější hodnoty výsledné veličiny	<p>Výpočet dosazením zpracovaných dat $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N\}$ do modelu:</p> $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N).$
3. Výpočet kombinované nejistoty zákonem přenášení variancí pro nezávislá měření	<p>K výpočtu je třeba provést:</p> <ul style="list-style-type: none"> výpočet parciálních derivací modelu podle jednotlivých proměnných: $\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, N)$ (pro vyčíslení derivací dosazujeme vypočtené odhady skutečných hodnot měřených veličin viz bod 1) výpočet zákona přenášení variancí $u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_c^2(x_i)}$
4. Výpočet rozšířené nejistoty	$U(y) = k u_c(y),$ <p>kde $k = 1,96$ pro 95%ní interval spolehlivosti, nebo $k = 2,576$ pro 99%ní interval spolehlivosti</p>
5. Presentace výsledků (zpravidla na 1 až 2 platné cifry)	$y = (\bar{y} \pm U(y)) \text{ a.u.}, k = nnn,$ <p>kde a.u. značí jednotky měřené veličiny, nnn je hodnota koeficientu rozšíření. V popisu nezapomeneme připomenou, jaký interval spolehlivosti byl pro výsledné hodnoty volen (byla-li počítána rozšířená nejistota).</p>

Shrnutí aproximace lineární závislosti procházející počátkem metodou nejmenších čtverců

V této části si schematicky ukážeme možný postup pro odhad skutečné hodnoty směrnice a přímky $y = ax$ a odhad její nejistoty $u_C(a)$, jestliže jsou hodnoty y_i ($i=1, \dots, N$) zatíženy chybami, tedy známe kombinované nejistoty $u_C(y_i)$, a tato měření jsou vzájemně nezávislá.

Poznámka: Obecně se při zpracování může stát, že i hodnoty x_i budou měřeny (odvozeny) s nejistotami, které budou různé pro různá měření. V takovém případě je nutné použít složitější aparát (např. optimalizační algoritmy), případně modifikovat metodu nejmenších čtverců. V našem případě se ale touto situací nebudeme zabývat, nebo budeme předpokládat, že hodnoty x_i budou měřeny se stejnou nejistotou (v praxi se budeme snažit sestavit model, který toto bude splňovat), čili se nebudou podílet na výpočtu různými vahami.

Krok	Vztahy
1. Určení odhadu skutečných hodnot y_i a jejich kombinovaných nejistot	Jsou-li hodnoty y_i zprostředkovány různými parametry, odhadneme nejprve jejich skutečné hodnoty postupy uvedenými v předchozích kapitolách. Dále odhadneme jejich kombinované nejistoty $u_C(y_i)$.
2. Výpočet směrnice přímky metodou nejmenších čtverců	K výpočtu použijeme aparát daný vztahy (17) – (21), případně upravený vztah (34) pro tento konkrétní případ, kdy váhy vyrovnání jsou dány pomocí nejistoty $u_C(y_i)$: $\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^N p_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^N p_i x_i^2}, \quad p_i = \frac{1}{u_C^2(y_i)}.$
3. Výpočet odhadu nejistoty vypočtené směrnice	$u_C(a) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i (\bar{a} x_i - y_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N p_i x_i^2}}$
4. Výpočet rozšířené nejistoty	$U(a) = k u_C(a),$ kde $k = 1,96$ pro 95%ní interval spolehlivosti, nebo $k = 2,576$ pro 99%ní interval spolehlivosti
5. Prezentace výsledků	$a = (\bar{a} \pm U(a)), \quad k = nnn,$ kde nnn je hodnota koeficientu rozšíření. V popisu nezapomeneme připomenout, jaký interval spolehlivosti byl pro výsledné hodnoty volen (byla-li počítána rozšířená nejistota).

Příklad zpracování měření v softwaru MATLAB

Ukažme si na příkladu **určení vlnové délky světla pomocí difrakce na mřížce** postup zpracování fyzikálních měření ve výpočetním prostředí MATLAB [14]. **MATLAB je optimalizován na práci s maticemi**, čili veškeré

měření si do nich nejprve přeformulujeme, a dále také použijeme maticový formalismus pro výpočet odhadů skutečných hodnot hledaných parametrů a jejich nejistot. MATLAB je velmi silný nástroj pro řešení různých druhů problémů, a je tak vhodné, aby se v něm, nebo v obdobném programu, studenti co nejdříve naučili formulovat dané úkoly a úspěšně je řešili. Uvedený kód řešení příkladu může posloužit jako výchozí bod pro získání základních znalostí ke zpracování komplexnějších úloh.

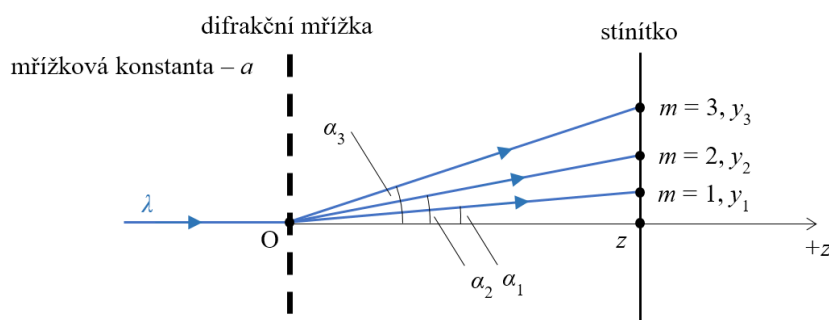
Na obr. 2 je ukázána schematická situace principu měření, který je nutný znát pro správné vyhodnocení. Světlo vlnové délky λ dopadá na difrakční mřížku o mřížkové konstantě a (vzdálenost mezi dvěma sousedními vrypy), která je umístěna v počátku souřadné soustavy, a dochází k přerozdělení energie světla do několika difrakčních řádů, které pozorujeme na stínítku. Pro m -tý difrakční řád poté platí následující vztah:

$$\sin \alpha_m = \frac{m\lambda}{a} = \frac{y_m}{\sqrt{y_m^2 + z^2}}, \quad (44)$$

kde α_m je úhel odpovídajícího m -tého řádu, m je celé číslo označující difrakční řád, y_m je příčná vzdálenost měřená na stínítku, z je vzdálenost stínítka od difrakční mřížky. Snadnou úpravou můžeme vztah (44) převést na lineární závislost $y = \lambda x$, kde vlnová délka bude představovat směrnici přímky, poté bude platit:

$$y = \frac{ay_m}{\sqrt{y_m^2 + z^2}}, \quad x = m. \quad (45)$$

Předpokládejme, že difrakce na mřížce byla měřena pro 5 difrakčních řádů. Pro každý difrakční řád m ($m = 1 - 5$) byla třikrát změřena příčná vzdálenost $y_{m,i}$ měřítkem s nejistotou $u_B(y_{m,i}) = 0,5 \text{ mm}$, dále byla metrem jednou změřena vzdálenost z stínítka od difrakční mřížky s nejistotou $u_B(z) = 1 \text{ mm}$. Z kalibračního listu byla odečtena mřížková konstanta a s nejistotou $u_B(a) = 0,005 \text{ mm}$. V tab. 3 jsou uvedeny přímo měřené hodnoty, odhad jejich skutečných hodnot a kombinovaných nejistot. Tab. 4 poté ukazuje hodnoty lineárního modelu (45) vypočteného pomocí měřených veličin společně s jeho nejistotami, a dále dokumentuje výpočet metody nejmenších čtverců a odhad nejistot výsledného parametru – vlnové délky.



Obr. 2 Difrakce na mřížce

Tab. 5 ukazuje výslednou vypočtenou vlnovou délku společně s odhadem její nejistoty s 95%ním intervalem spolehlivosti. Na obr. 3 je poté zobrazen lineární model vypočtený z měření pomocí vztahu společně s lineární aproximací vypočtenou metodou nejmenších čtverců. Tab. 6 ukazuje použitý výpočetní kód pro prostředí Matlab.

Tabulka 3 Měřené hodnoty

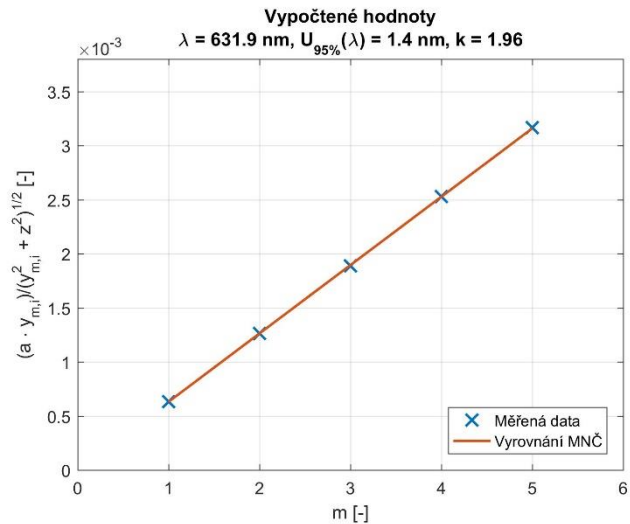
m	$y_{m,i}$ [mm]			$\tilde{y}_{m,i}$ [mm]	$u_C(y_{m,i})$ [mm]	a [$u_B(a)$] [mm]	z [$u_B(z)$] [mm]
1	31,7	31,5	31,8	31,67	0,30	0,02 [0,005]	1000 [1]
2	63,3	63,1	63,4	63,27	0,30		
3	94,9	94,9	94,7	94,83	0,30		
4	127,4	127,6	127,4	127,47	0,30		
5	160,3	160,2	160,5	160,33	0,30		

Tabulka 4 Vypočtené hodnoty lineárního modelu

m	$\bar{y}_{m,i} \cdot 1e - 4$ [-]	$u(\bar{y}_{m,i}) \cdot 1e - 4$ [-]
1	6,33	1,58
2	12,63	3,16
3	18,88	4,72
4	25,29	6,32
5	31,66	7,92
$\hat{\lambda}$ [nm]	631,85	
$u_C(\lambda)$ [nm]	0,70	
$U(\lambda)$ [nm], $k = 1,96$	1,36	

Tabulka 5 Výsledné hodnoty výpočtu

Vlnová délka [nm]	Nejistota [nm] ($k = 1,96$, interval spolehlivosti 95%)
631,9	1,4



Obr. 3 Zobrazení hodnot vypočteného lineárního modelu a výpočet vyrovnání metodou nejmenších čtverců

Tabulka 6 Řešení vzorové úlohy v prostředí MATLAB

```

%% Merene hodnoty (pro MNC nutne zadat jako sloupcove vektory)
% difrakcni rady
m = [1:5]';

% merene polohy difrakcni radu, kazdy meren 3x
ym_merene = [ 31.7  31.5  31.8
              63.3  63.1  63.4
              94.9  94.9  94.7
              127.4 127.6 127.4
              160.3 160.2 160.5];

% vzdalenost stinitka a mritzkoiva konstanta
z = 1000; a = 0.02;

%% Nejistoty merenych hodnot odhadnute metodou B
uBym = 0.5; uBa = 0.005; uBz = 1;

%% Zpracovani primo merenych hodnot
% odhad stredni hodnoty
ym = mean(ym_merene,2);           % prumer ve smeru radku (viz help mean)

% odhad kombinovane nejistoty merenych parametru
N = size(ym_merene,2);           % pocet mereni kazde veliciny
eym = ym_merene - repmat(ym,1,N); % odchylky mereni od prumeru
uCym = sqrt((sum(eym.^2,2)/(N-1) + uBym^2)/N);

%% Vypocet hodnot pro linearni zavislost (tvorba linearniho modelu)
y = a*ym./sqrt(ym.^2 + z^2);
x = m;

%% Vypocet nejistot velicin pro linearni zavislost (zakon prenosu varianci)
% derivace y podle merenych velicin
dy_ym = y*z^2./(ym.*(ym.^2 + z^2));
dy_z = y*z./(ym.^2 + z^2);
dy_a = y/a;

% nejistota uy
uCy = sqrt(dy_ym.^2.*uCym.^2 + dy_z.^2*uBz.^2 + dy_a.^2*uBa.^2);

%% Vahy pro MNC
p = uCy(1)^2./uCy.^2;           % jako sig0 volena prvni z uCy
P = diag(p);

%% Vypocet MNC
A = x; l = y;
lam = (A'*P*A)\(A'*P*l);

```



```
%% Nejistota z MNC
E = A*lam - l;
s0 = sqrt(E'*P*E/(size(A,1) - 1));
S = s0^2*inv(A'*P*A);
ulam = sqrt(diag(S));

%% Vysledna rozsirena nejistota lambda s 95%nim intervalem spolehlivosti
kp = 1.96;
Ulam = kp*ulam;

%% Zobrazeni vyslednych hodnot
fprintf('Vypoctene hodnoty [nm]: lam = %.1f, U95 = %.1f, k = %.2f\n', lam*1e+6, Ulam*1e+6, kp)

%% Graf
figure(1)
plot(x, y, 'x', ...
     x, A*lam, '-', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerSize', 10)
grid on
xlim([0 max(x)+1])
ylim([0 max(y)+0.2*max(y)])
xlabel('m [-]')
ylabel('(a \cdot y {m,i})/(y^2 {m,i} + z^2)^{1/2} [-]')
title({'Vypočtené hodnoty', ['\lambda = ', num2str(lam*1e+6, '%.1f'), ...
    ' nm, U_{95%}(\lambda) = ', num2str(Ulam*1e+6, '%.1f'), ' nm, k = ', num2str(kp, '%.2f')]})
legend('Měřená data', 'Vyrovnání MNC', 'Location', 'SouthEast')
```

Doporučená literatura

- [1] JCGM 100:2008, *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement*, 2008.
- [2] Kaarls R., *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, A1-A12, 1981 (in French); Giacomo P., *Metrologia* **17**, 73 -74, 1981 (in English).
- [3] Červenka M., *Zpracování fyzikálních měření*, FEL-ČVUT, 2013, online 21. 2. 2017: <http://herodes.feld.cvut.cz/mereni/downloads/navody/zpracdat.pdf> .
- [4] Horák Z., Krupka F., Šindelář V., *Technická fyzika*, SNTL, 1961.
- [5] Horák Z., *Praktická fyzika*, SNTL, 1958.
- [6] Rektorys K., *Přehled užití matematiky*, SNTL, 1968.
- [7] Bubeník F., Pultar M., Pultarová I., *Matematické vzorce a metody*, Nakladatelství ČVUT, 2010.
- [8] Brož J. a kol., *Základy fyzikálních měření I-III*, Státní pedagogické nakladatelství, 1967.
- [9] Meloun M., Militký J., *Statistická analýza experimentálních dat*, Academia, 2004.
- [10] Lira I., *Evaluating the Measurement Uncertainty*, IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 2002.
- [11] Gupta S. V., *Measurement Uncertainties*, Springer, 2012.
- [12] Grabe M., *Measurement Uncertainties in Science and Technology*, Springer, 2014.
- [13] Mervart L., Lukeš Z., *Adjustment Calculus*, Nakladatelství ČVUT, 2007.
- [14] MATLAB – The Language of Technical Computing, online 21. 2. 2017: www.mathworks.com .

Dodatek 1 – K jednotkové směrodatné odchylce

Jak bylo zmíněno, volba jednotkové směrodatné odchylky σ_0 neovlivní výsledky vyrovnání metodou nejmenších čtverců ani hodnoty výsledných odhadů nejistot, což si můžeme snadno ukázat. Váha i -tého měření je dána jako $p_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$, kde σ_0 je konstantní hodnota. Váhovou matici definovanou jako $\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_N)$ můžeme tedy zapsat jako:

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sigma_N^2 \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \mathbf{P}' . \quad (\text{D1.1})$$

Odhad skutečných hodnot parametrů $\bar{\mathbf{q}}$ poté vypočteme dle vztahu (21), platí:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ &= (\sigma_0^2 \mathbf{A}^T \mathbf{P}' \mathbf{A})^{-1} \sigma_0^2 \mathbf{A}^T \mathbf{P}' \mathbf{l} \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P}' \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}' \mathbf{l} . \end{aligned} \quad (\text{D1.2})$$

Odhad kovarianční matice parametrů $\bar{\mathbf{q}}$ bude po dosazení (D1.1) do (22) dán jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{q}}) &= \frac{(\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{l})^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{l})}{N - M} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \\ &= \frac{\sigma_0^2 (\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{l})^T \mathbf{P}' (\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{l})}{N - M} (\sigma_0^2 \mathbf{A}^T \mathbf{P}' \mathbf{A})^{-1} \\ &= \frac{(\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{l})^T \mathbf{P}' (\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} - \mathbf{l})}{N - M} (\mathbf{A}^T \mathbf{P}' \mathbf{A})^{-1} . \end{aligned} \quad (\text{D1.3})$$

Ze vztahu (D1.2) a (D1.3) je zřejmé, že volená hodnota apriorní jednotkové směrodatné odchylky neovlivní výsledky určené metodou nejmenších čtverců.

Pro další možnost snadného pochopení uveďme ještě příklad pro lineární závislost procházející počátkem, kdy použijeme formulaci danou vztahy (32) až (33). Předpokládejme tedy, že situace je dána modelem:

$$y_i = ax_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{D1.4})$$

Poté snadno vidíme použitím aparátu metody nejmenších čtverců a dosazením $p_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$, že pro odhad směrnice přímky procházející počátkem platí:

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \frac{\sum_{i=1}^N p_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^N p_i x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_0^2 x_i y_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^N \sigma_0^2 x_i^2 / \sigma_i^2} = \frac{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^N x_i y_i / \sigma_i^2}{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^N x_i^2 / \sigma_i^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i / \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^N x_i^2 / \sigma_i^2}.
\end{aligned} \tag{D1.5}$$

Pro odhad nejistoty vypočteného parametru obdobně dostáváme:

$$\begin{aligned}
s(\bar{a}) &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i (\bar{a} x_i - y_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N p_i x_i^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \sigma_0^2 (\bar{a} x_i - y_i)^2 / \sigma_i^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N \sigma_0^2 x_i^2 / \sigma_i^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^N (\bar{a} x_i - y_i)^2 / \sigma_i^2}{(N-1) \sigma_0^2 \sum_{i=1}^N x_i^2 / \sigma_i^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{a} x_i - y_i)^2 / \sigma_i^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N x_i^2 / \sigma_i^2}}.
\end{aligned} \tag{D1.6}$$

Ze vztahů (D1.5) a (D1.6) je zřejmé, že volba jednotkové směrodatné odchylky neovlivní numerické hodnoty výsledků.

Dodatek 2 – K směrodatné odchylce

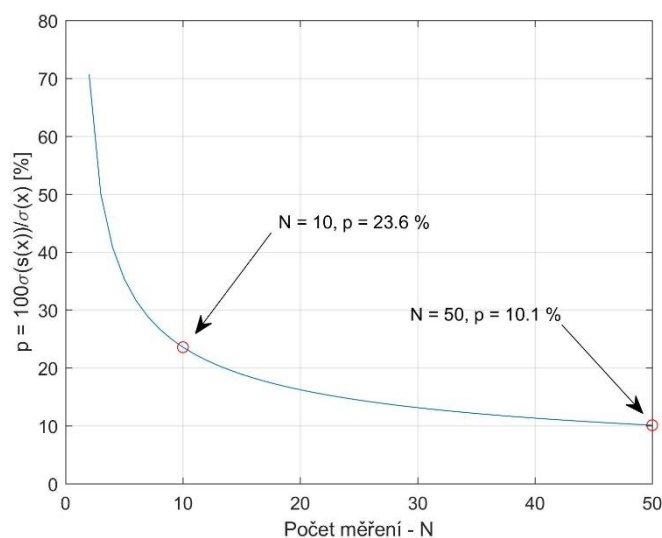
Je-li pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny x normální, potom přibližně platí [1]:

$$\frac{\sigma(s(x))}{\sigma(x)} = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}}, \quad (\text{D2.1})$$

kde N je počet měření, $\sigma(s(x))$ je směrodatná odchylka výběrové směrodatné odchylky $s(x)$, $\sigma(x)$ je směrodatná odchylka náhodné veličiny x .

Jinými slovy, **odhad nejistoty** provedený odhadem směrodatné odchylky – výpočet výběrové směrodatné odchylky $s(x)$, **má také svou nejistotu**. Toto vychází z toho, že x je náhodná veličina, a potom i $s(x)$ je náhodná veličina se svou směrodatnou odchylkou.

Uvážíme-li tedy $\sigma(s(x))$ jako nejistotu $s(x)$, poté vztah (D2.1) vyjadřuje relativní nejistotu $s(x)$. Pro 10 měření (tj. v našem případě 9 stupňů volnosti) odpovídá relativní nejistota 23,6 %. Pro 50 měření je poté 10,1 %. Na obr. 4 je zobrazena závislost relativní odchylky (D2.1) v procentech na počtu měření N .



Obr. 4 Závislost relativní odchylky na počtu měření